

Leçon 06 – Correction des "Exercez-vous"

.....

Exercez-vous 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une base orthonormée de vecteurs propres de A.

Solution

Cherchons d'abord les valeurs propres de A :

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(2-\lambda).$$

On en déduit alors les valeurs propres de A : -1 et 2 avec $m(-1) = 2$ et $m(2) = 1$.

$P_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda = 2$ si et seulement si $\begin{cases} -2x+y+z = 0 \\ x-2y+z = 0 \\ x+y-2z = 0 \end{cases}$

Soit $x = y = z$ et $P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ convient et est de norme 1.

$P_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda = -1$ si et seulement si $x+y+z = 0$.

Il faut donc trouver deux vecteurs de norme 1, orthogonaux et dont les coordonnées vérifient

$x + y + z = 0$. Or $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux et vérifient $x+y+z = 0$.

Et si on divise ces vecteurs par leur norme, on obtiendra des vecteurs propres associés à $\lambda = -1$, normés et orthogonaux.

Donc $P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ conviennent et $\{P_1, P_2, P_3\}$ forment une base

orthonormée de vecteurs propres de A .

D'autre part $A = PD^tP$ avec $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Remarquons que P est orthogonale et que $P^{-1} = {}^tP = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.