Leçon 06 – Correction des "Avez-vous compris?

Avez-vous compris 3: Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $q(x,y,z) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4yz + 2z^2$. Donner la matrice de q. On considère X soumis aux contraintes $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ -4x + 2y - z = 0 \end{cases}$. Donner les matrices B et B_p du cours. S'il y a un changement de variables à faire donner la matrice de q en conséquence.

Solution

q est représentée par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (« symétrique » n'est pas précisé mais c'est sous-entendu).

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, mais $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ ne l'est pas et ne peut être B_p.

Il faut échanger 2 variables, y et z par exemple. On obtient alors $B' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$B'_p = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible. La matrice de q correspondante est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ car $q(x,y,z) = x^2 + 0xz - 2xy + 2z^2 + 4zy + 3y^2$.