Leçon 06 – Correction des "Avez-vous compris?"

Avez-vous compris ? 2 : 1) Supposons que $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ représente la forme quadratique $q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$. Donner l'expression de $q(x,y,z)$.
 2) Donner une matrice triangulaire inférieure T qui représente aussi q .
 3) Donner une matrice symétrique A qui représente q .

Solution

1) $q(x,y,z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4x^2 + 3xy - xz - 5yx - 3yz + 3zx - zy + z^2.$

2) Donnons une matrice triangulaire supérieure T qui représente aussi q .

$q(x,y,z)$ peut aussi s'écrire $q(x,y,z) = 4x^2 - 2xy + 2xz - 4yz + z^2$. D'où $T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Donnons une matrice symétrique A qui représente q . Elle correspond à l'expression : $q(x,y,z) = 4x^2 - xy + xz - yx - 2yz + zx - 2zy + z^2$ (les termes en xy et yx ont mêmes coefficients, de même pour les termes en xz et zx et ceux en yz et zy).

Et $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

C'est la matrice symétrique A que l'on utilisera de préférence pour représenter une forme quadratique q .

Soit $q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $q(x,y,z) = 3xy + xz - yx - 2yz + zx + 4zy$

La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ représente q puisque $q(x,y,z) = (x \ y \ z)B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Mais B n'est pas

symétrique et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique et représente aussi q . C'est la matrice que l'on

utilisera donc de préférence pour représenter q .