Leçon 06 – Exercices

Exercice 1 - Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbf{R}^3$ par $q(x,y,z) = x^2 + 4xz + 2y^2 + z^2$.

1) Déterminer la matrice A symétrique associée à q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2) Construire une base orthonormée P formée de vecteurs propres de A.
3) Déterminer la matrice B associée à q dans la base P. En déduire l'expression de la forme réduite de q(x,y,z).
4) Utiliser la méthode de Gauss pour trouver une forme réduite de q.

Exercice 2 – Déterminer la matrice symétrique représentant q, donner une forme réduite de forme réduite de q par la méthode de Gauss dans les cas :

1) $q(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 2xy - 4xz$.
2) $q(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 - xy - yz$
3) $q(x,y,z) = 2xy - x^2 - 2xz - 5y^2 + 6yz - 3z^2$
4) $q(x,y,z) = 2xy - 2yz$

Exercice 3 - Que doit vérifier le paramètre réel a pour que la forme quadratique suivante soit définie positive ?

$$q(x,y,z) = x^2 + ay^2 + z^2 - xy - yz$$

Exercice 4 – Pour chacune des formes quadratiques de l'exercice **2**, déterminer sa nature en utilisant les mineurs principaux et éventuellement la trace de la matrice symétrique qui la représente.

Exercice 5 - Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle la matrice d'une forme quadratique définie positive?

6 - On considère la forme quadratique $q(x,y,z) = 3x^2 - 4xy + 2xz - y^2 + 2z^2$.

a) Donner la matrice de A de q. Donner la nature de q.
b) On considère q sous la contrainte (C_1) : $x - 2y + z = 0$. Déterminer la nature de q sous C_1).
c) On considère q sous la contrainte (C_2) : $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$. Déterminer la nature de q sous (C_2).

7 - Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels des fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}^3$ par :

1)$f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + z^2 - 4z + 5$

2)$g(x,y,z) = x^4 - 2x^2 y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$

(indication : si on est bloqué dans le calcul des points stationnaires, on pourra admettre qu'il y a trois points stationnaires : $A(\sqrt{2}, 2, 2)$, $B(-\sqrt{2}, 2, 2)$ et $C(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

8 - Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels de la fonction f définie par $f(x,y,z) = x\ln y + z\ln x - y$

9 - En utilisant les matrices hessiennes bordées, déterminer et préciser la nature des extrema éventuels des fonctions suivantes, les variables x et y étant liées par une contrainte :

1)$f(x,y) = xy$ avec $x^2 + y^2 = 2$ (remarquer qu'un point stationnaire du lagrangien correspond à $x = 0$ ou $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

2)$f(x,y) = \ln(x-y)$ avec $x^2 + y^2 = 2$

(indication : si on est bloqué dans le calcul des points stationnaires, on pourra admettre qu'il y a un seul point stationnaire : $A(1,-1)$ et on donnera la valeur du multiplicateur de Lagrange correspondant)

10 - 1)En utilisant les matrices hessiennes bordées, déterminer et préciser la nature des extrema éventuels de $f(x,y,z) = x + y + z$, les variables x, y et z étant liées par la contrainte (C) : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2) Soit $f(x,y,z) = xyz$ sous la contrainte (C) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1$.

Montrer que $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ sont des points stationnaires du Lagrangien, puis préciser si ce sont des maxima ou des minima de f sous (C).

11 - Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels de la fonctions f définie sur $\mathbf{R}^3$ par : $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 4xy + 12z + 6z^2$, les variables x, y et z étant soumises aux deux contraintes suivantes : $z - x = 3$ et $x - y = 0$.

(On vérifiera que $\left(-\frac{24}{5}, -\frac{24}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ est le seul point stationnaire du Lagrangien).

12 - Soit la forme quadratique : $q(x,y,z) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4yz - 2z^2$.

1) On considère (x,y,z) soumis à la contrainte $C_1 : x + 2y - z = 0$. Donner alors la nature de q.

2) On considère (x,y,z) soumis à la contrainte $C_2 : x + 2y - z = 0$ et $x - y + z = 0$
Donner la nature de q sous C_2.

13 - Soit F la fonction de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$F(x,y,z) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + \frac{2}{3} yz + \frac{4}{3} z^2 - 6x - 2y - 2z + 5$

Déterminer les points stationnaires de F. Pour chaque point stationnaire A, déterminer la matrice hessienne de A, F"(A) et en déduire la nature du point stationnaire A.

14 – Soit $q(x,y,z) = 2x^2 – 4xy + 4xz + y^2 – 6yz + 3z^2$
1) Donner la matrice symétrique représentant q.
2) Donner la forme réduite de q et en déduire la nature de q.
3) On considère q munie de la contrainte : $2x + 2y + z = 0$. Donner, à l'aide de la matrice bordée, la nature de q sous cette contrainte.

15 – Soit $f(x,y) = x\exp(-x+y^2) + xy – 3y^2 + 4y$ sous la contrainte,
$x^2 + y^2 + xy = 3$.

1) Montrer que (1,1) est un point stationnaire du lagrangien pour lequel on précisera le multiplicateur de lagrange.
2) Donner la nature du point stationnaire (1,1) à l'aide de la matrice hessienne bordée.