Leçon 05 - Exercices

Exercice 1-Résoudre les équations différentielles suivantes où t est la variable :

1) $x'(t) - x(t) + 1 + t = 0$
2) $x'(t) - 2x(t) - 2t^3 - t = 0$ et $x(0) = 1$
3) $x'(t) - 3x(t) = 2e^{3t}$ et $x(1) = 4e^3$
4) $3x'(t) - 2x(t) - 3\cos 2t = 0$ et $x(0) = \frac{17}{20}$
5) $x(t) + x'(t) = 2te^{-t}$ et $x(0) = 1$

Exercice 2 - Résoudre les équations différentielles suivantes où t est la variable :

1) $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = e^{-t}\cos 2t$ et $x'(0) = -2$ et $x(0) = 1$
2) $4x''(t) + 4x'(t) + x(t) = 0$
3) $x''(t) + 4x(t) = 0$
4) $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2t - \sin t$
5) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = e^t$
6) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) - e^t(1-2t) = 0$
7) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) - te^{2t} = 0$ et $x(0) = 1$ et $x'(0) = 4$.

Exercice 3 - Résoudre les équations différentielles suivantes où t est la variable :

1) $x^{(3)}(t) - 2x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0$ et $x(0) = 5$ et $x'(0) = 3$ et $x''(0) = 0$
2) $x^{(3)}(t) - 2x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 2t^2$ et $x(0) = \frac{5}{2}$ et $x'(0) = 2$ et $x''(0) = 0$
3) $x^{(3)}(t) - x''(t) + x'(t) - x(t) = 2e^t$ et $x(0)=1$ et $x'(0)=0$ et $x''(0)=1$

Exercice 4 - On donne le résultat suivant : si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible alors $P^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2 \\ y'(t) = x(t) + y(t) - 2t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2e^{2t} \\ y'(t) = -x(t) + y(t) + 2t + 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x'_1(t) = -x_1(t) - 2x_3(t) \\ x'_2(t) = -x_2(t) + 4x_3(t) \\ x'_3(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) - x_2(t) + 4x_3 \\ x'_2(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x'_3(t) = 2x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$

Exercice 5 - On considère l'équation : $x''(t) = -2x'(t) + bx(t)$ (b est un paramètre réel non nul). Etudier la stabilité des solutions.

Exercice 6 - Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles d-stables ?

Exercice 7 - Pour quelles valeurs de a la matrice $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle d-stable?

Exercice 8 - Résoudre $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + 2\sin t + e^{-t} \\ y'(t) = -5x(t) + 4y(t) - \frac{1}{2} z(t) + 3\sin t + 2e^{-t} + t \\ z'(t) = -7x(t) + 5y(t) - \frac{1}{2} z(t) + \sin t + 2e^{-t} + 2t \\ x(0) = -\frac{1}{6} \text{ , } y(0) = 1 \text{ , } z(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$.

(On pourra utiliser des résultats obtenus dans les exercices 14 et 16 du chapitre précédent)?

Exercice 9 - Résoudre **astucieusement** $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + t + 2e^{t} \\ y'(t) = -x(t) + y(t) - t - e^{t} \\ z'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ x(0) = -2 \text{ , } y(0) = 2 \text{ , } z(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

(On pourra utiliser les résultats de l'exercice **10** du chapitre précédent)

N.B. : On donne le résultat suivant : si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible alors $P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 10 - 1) Réduire $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en choisissant pour une matrice de passage ayant pour dernière ligne (1 1).

2) - Résoudre **astucieusement** $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2^{e3t} + 1 \\ y'(t) = x(t) - 4y(t) + 4z(t) + 4t + 7 - e^{3t} \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) + 2t + 4 - 2^{e3t} \\ x(0) = 1 \text{ , } y(0) = 3 \text{ , } z(0) = 2 \end{cases}$

N.B. : On donne le résultat suivant : si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible alors

$$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$