L3 économie appliquée
EAD - Canège
Université Paris-sud
0dile Brandière

Correction des exercices de la leçon 5 : Equations différentielles

1. 1) L'équation s'écrit $x'(t) - x(t) = -1 - t \quad (1)$, et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = \varphi(t) + x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1) : $\varphi'(t) - \varphi(t) = 0 \quad (2)$,

et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t) = ke^t.$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t) = C_1 t + C_2$ et on détermine C_1 e C_2 en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1) :

$C_1 - (C_1 t + C_2) = -1 - t$, soit $t(-C_1 + 1) + (C_1 - C_2 + 1) = 0$. D'où $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ et $x^*(t) = t + 2$. Donc

$$x(t) = ke^t + t + 2.$$

k peut être déterminée si on connaît la condition initiale.

2)L'équation s'écrit $x'(t) - 2x(t) = 2t^3 + t \quad (1)$, et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = \varphi(t) + x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1) : $\varphi'(t) - 2\varphi(t) = 0 \quad (2)$,

et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t) = ke^{2t}.$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t) = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4$ et on détermine C_1, C_2 et C_3 en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1) :

$3C_1t^2 + 2C_2t + C_3 - 2(C_1t^3 + C_2t^2 + C_3t + C_4) = 2t^3 + t$, soit
$t^3(-2C_1 - 2) + t^2(3C_1 - 2C_2) + t(2C_2 - 2C_3 - 1) + (C_3 - 2C_4) = 0$.
D'où $C_1 = -1$, $C_2 = -\frac{3}{2}$, $C_3 = -2$, $C_4 = -1$ et $x^*(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 2t - 1$. Donc

$$x(t) = ke^{2t} - t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 2t - 1.$$

On détermine k à l'aide de la condition initiale $x(0) = 1$. Donc
$1 = k - 1$ et $k = 2$, d'où :

$$x(t) = 2e^{2t} - t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 2t - 1.$$

3)L'équation s'écrit $x'(t) - 3x(t) = 2e^{3t}$ (1), et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = \varphi(t) + x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1) : $\varphi'(t) - 3\varphi(t) = 0$ (2),
et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t) = ke^{3t}.$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t) = Cte^{3t}$ (il y a résonance) et on détermine C en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1) :

$Ce^{3t} + 3Cte^{3t} - 3(Cte^{3t}) = 2e^{3t}$, soit
$e^{3t}(C - 2) = 0$.
D'où $C = 2$ et $x^*(t) = 2te^{3t}$. Donc

$$x(t) = ke^{3t} + 2te^{3t}.$$

On détermine k à l'aide de la condition initiale $x(1) = 4e^3$. Donc
$4e^3 = ke^3 + 2e^3$ et $k = 2$, d'où :

$$x(t) = (2t + 2)e^{3t}.$$

4)L'équation s'écrit $3x'(t) - 2x(t) = 3\cos 2t$ (1), et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = \varphi(t) + x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1) : $3\varphi'(t) - 2\varphi(t) = 0$ (2),
et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t) = ke^{\frac{2}{3}t}.$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$ et on détermine C_1 et C_2 en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1) :

$3(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t) - 2(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) = 3 \cos 2t$, soit

$(6C_2 - 2C_1 - 3) \cos 2t + (-6C_1 - 2C_2) \sin 2t = 0$.

D'où $C_1 = -\frac{3}{20}$, $C_2 = \frac{9}{20}$ et $x^*(t) = -\frac{3}{20} \cos 2t + \frac{9}{20} \sin 2t$. Donc

$$x(t) = ke^{\frac{2}{3}t} - \frac{3}{20} \cos 2t + \frac{9}{20} \sin 2t.$$

On détermine k à l'aide de la condition initiale $x(0) = \frac{17}{20}$. Donc $\frac{17}{20} = k - \frac{3}{20}$ et $k = 1$, d'où :

$$x(t) = e^{\frac{2}{3}t} - \frac{3}{20} \cos 2t + \frac{9}{20} \sin 2t.$$

5) L'équation s'écrit $x'(t) + x(t) = 2te^{-t} \quad (1)$, et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = \varphi(t) + x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1) : $\varphi'(t) + \varphi(t) = 0 \quad (2)$,

et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t) = ke^{-t}.$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t) = t(C_1 t + C_2)e^{-t}$ (il y a résonance) et on détermine C_1 e C_2 en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1) :

$(2C_1 t + C_2)e^{-t} - (C_1 t^2 + C_2 t)e^{-t} + (C_1 t^2 + C_2 t)e^{-t} = 2te^{-t}$, soit $te^{-t}(2C_1 - 2) + C_2 e^{-t} = 0$. D'où $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ et $x^*(t) = t^2 e^{-t}$. Donc

$$x(t) = ke^{-t} + t^2 e^{-t}.$$

On détermine k à l'aide de la condition initiale $x(0) = 1$. Donc $1 = k$ et

$$x(t) = e^{-t} + t^2 e^{-t}.$$

2. 1) L'équation s'écrit $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = e^{-t} \cos 2t \quad (1)$, et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = \varphi(t) + x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1) : $3\varphi''(t) + 2\varphi'(t) + 2\varphi(t) = 0 \quad (2)$,

et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

L'équation caractéristique associée à (2) est : $r^2 + 2r + 2 = 0 \quad (3)$. Or $\Delta = -4 = (2i)^2$ et (3) a pour solutions $r_1 = -1 - i$ et $r_2 = -1 + i$.

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t) = e^{-t}(k_1 \cos t + k_2 \sin t).$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$ et on détermine C_1 et C_2 en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1). On a

$(x^*)'(t) = -e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^{-t}(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t)$,

$(x^*)''(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) - 2e^{-t}(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t) + e^{-t}(-4C_1 \cos 2t - 4C_2 \sin 2t)$. Et si $x^*(t)$ vérifie (1), on obtient :

$e^{-t}[(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) - 2(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t) + (-4C_1 \cos 2t - 4C_2 \sin 2t)] + 2e^{-t}[(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + (-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t)] + 2e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) = e^{-t} \cos 2t$.

Et en ordonnant :

$(2C_1 + C_2)e^{-t} \sin 2t + (C_1 - 2C_2 - 1)e^{-t} \cos 2t = 0$, soit $C_1 = \frac{1}{5}$, $C_2 = -\frac{1}{5}$ et $x^*(t) = e^{-t}(\frac{1}{5} \cos 2t - \frac{2}{5} \sin 2t)$. Donc

$$x(t) = e^{-t}(k_1 \cos t + k_2 \sin t) + e^{-t}(\frac{1}{5} \cos 2t - \frac{2}{5} \sin 2t).$$

On détermine k_1 et k_2 à l'aide des conditions initiales $x'(0) = -2$ et $x(0) = 1$. Donc $-2 = -k_1 - \frac{1}{5} + k_2 + \frac{4}{5}$ et $1 = k_1 + \frac{1}{5}$, soit $k_1 = -\frac{4}{5}$ et $k_2 = -\frac{17}{5}$. D'où :

$$x(t) = e^{-t}(-\frac{4}{5} \cos t - \frac{17}{5} \sin t) + e^{-t}(\frac{1}{5} \cos 2t - \frac{2}{5} \sin 2t).$$

2)L'équation s'écrit $x''(t) + 4x(t) = 0 \quad (1)$, c'est une équation homogène.

L'équation caractéristique associée à (1) est : $r^2 + 4 = 0 \quad (3)$.

(3) a pour solutions $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$.

D'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t.$$

Les constantes k_1 et k_2 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

3)L'équation s'écrit $4x''(t) + 4x'(t) + x(t) = 0 \quad (1)$, c'est une équation homogène.

L'équation caractéristique associée à (1) est : $4r^2 + 4r + 1 = 0 \quad (3)$.

(3) a pour solutions $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$.

D'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = (k_1 + k_2 t)e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Les constantes k_1 et k_2 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

4) L'équation s'écrit $x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2t-\sin t \quad (1)$, et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t)=\varphi(t)+x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1) : $\varphi''(t)-2\varphi'(t)+2\varphi(t)=0 \quad (2)$, et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

L'équation caractéristique associée à (2) est : $r^2-2r+2=0 \quad (3)$. Or $\Delta=-4=(2i)^2$ et (3) a pour solutions $r_1=1-i$ et $r_2=1+i$.

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t)=e^t(k_1\cos t+k_2\sin t).$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+C_3t+C_4$ et on détermine C_1, C_2, C_3 et C_4 en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1). On a

$(x^*)'(t)=-C_1\sin 2t+C_2\cos 2t+C_3$,

$(x^*)''(t)=-C_1\cos 2t-C_2\sin 2t$. Et si $x^*(t)$ vérifie (1), on obtient :

$(-C_1\cos 2t-C_2\sin 2t)-2(-C_1\sin 2t+C_2\cos 2t+C_3)+2(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+C_3t+C_4)=2t-\sin t$. Et en ordonnant :

$(-C_1-2C_2+2C_1)\cos 2t+(-C_2+2C_1+2C_2+1)\sin 2t+t(2C_3-2)+(-2C_3+2C_4)=0$ et $C_1=-\frac{2}{5}$, $C_2=-\frac{1}{5}$, $C_3=1$ et $C_4=1$. D'où : $x^*(t)=-\frac{2}{5}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t+t+1$ et

$$x(t)=e^t(k_1\cos t+k_2\sin t)-\frac{2}{5}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t+t+1.$$

Les constantes k_1 et k_2 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

5) L'équation s'écrit $x''(t)-x'(t)-2x(t)=e^t \quad (1)$, et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t)=\varphi(t)+x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1) : $\varphi''(t)-\varphi'(t)-2\varphi(t)=0 \quad (2)$, et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

L'équation caractéristique associée à (2) est : $r^2-r-2=0 \quad (3)$. (3) a pour solutions $r_1=-1$ et $r_2=2$.

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{2t}.$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t)=Ce^t$ et on détermine C en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1).

$Ce^t-Ce^t-2Ce^t=e^t$, soit $e^t(-2C-1)=0$ et $C=-\frac{1}{2}$. Donc $x^*(t)=-\frac{1}{2}e^t$ et

$$x(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{2t}-\frac{1}{2}e^t.$$

k_1 et k_2 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

6)L'équation s'écrit $x''(t)-3x'(t)+2x(t)=e^t(1-2t)\quad(1)$, et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t)=\varphi(t)+x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1) : $\varphi''(t)-3\varphi'(t)+2\varphi(t)=0\quad(2)$, et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

L'équation caractéristique associée à (2) est : $r^2-3r+2=0\quad(3)$. (3) a pour solutions $r_1=1$ et $r_2=2$.

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t)=k_1e^t+k_2e^{2t}.$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t)=te^t(C_1t+C_2)$ (il y a résonance) et on détermine C_1 et C_2 en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1). On a

$(x^*)'(t)=e^t(C_1t^2+C_2t)+e^t(2C_1t+C_2)$,
$(x^*)''(t)=e^t(C_1t^2+C_2t)+2e^t(2C_1t+C_2)+e^t(2C_1)$.
Si $x^*(t)$ vérifie (1) :
$(e^t(C_1t^2+C_2t)+2e^t(2C_1t+C_2)+e^t(2C_1))-3(e^t(C_1t^2+C_2t)+e^t(2C_1t+C_2))+2(e^t(C_1t^2+C_2t))=e^t(1-2t)$, soit

$e^t[t^2(C_1-3C_1+2C_1)+t(C_2+4C_1-3C_2-6C_1+2C_2+2)+(2C_2+2C_1-3C_2-1)=0$
et $C_1=1$, $C_2=1$ et $x^*(t)=te^t(t+1)$ et

$$x(t)=k_1e^t+k_2e^{2t}+te^t(t+1)+te^t(t+1).$$

Les constantes k_1 et k_2 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

7)L'équation s'écrit $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=te^{2t}\quad(1)$, et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t)=\varphi(t)+x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1) : $\varphi''(t)-4\varphi'(t)+4\varphi(t)=0\quad(2)$, et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

L'équation caractéristique associée à (2) est : $r^2-4r+4=0\quad(3)$. (3) a pour solutions $r_1=r_2=2$.

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t)=(k_1t+k_2)e^{2t}.$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t)=t^2e^{2t}(C_1t+C_2)$ (il y a “double” résonance) et on détermine C_1 et C_2 en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1). On a

$(x^*)'(t) = 2e^{2t}(C_1t^3 + C_2t^2) + e^{2t}(3C_1t^2 + 2C_2t)$,
$(x^*)''(t) = 4e^{2t}(C_1t^3 + C_2t^2) + 4e^{2t}(3C_1t^2 + 2C_2t) + e^{2t}(6C_1t + 2C_2)$.
Si $x^*(t)$ vérifie (1) :
$(4e^{2t}(C_1t^3+C_2t^2)+4e^{2t}(3C_1t^2+2C_2t)+e^{2t}(6C_1t+2C_2))-4(2e^{2t}(C_1t^3+C_2t^2)+e^{2t}(3C_1t^2+2C_2t)) + 4(e^{2t}(C_1t^3 + C_2t^2)) = te^{2t}$, soit

$e^{2t}[t^3(4C_1-8C_1+4C_1)+t^2(4C_2+12C_1-8C_2-12C_1+4C_2)+t(8C_2+6C_1-8C_2-1)+8C_2] = 0$ et $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = 0$ et $x^*(t) = \frac{1}{6}t^3e^{2t}$ et

$$x(t) = (k_1t + k_2)e^{2t} + \frac{1}{6}t^3e^{2t}.$$

On détermine k_1 et k_2 à l'aide des conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 4$. Donc $1 = k_2$ et $4 = 2k_2 + k_1$, soit $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$. D'où :

$$x(t) = (2t + 1)e^{2t} + \frac{1}{6}t^3e^{2t}.$$

3. 1)L'équation s'écrit $x^{(3)}(t) - 2x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0$ (1), c'est une équation homogène.

L'équation caractéristique associée à (1) est : $r^3-2r^2+r-2 = 0$ (3), soit $(r-2)(r^2+1) = 0$. (3) a pour solutions $r_1 = 2$, $r_2 = i$ et $r_3 = -i$.

D'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = k_1e^{2t} + k_2\cos t + k_3\sin t.$$

On détermine k_1, k_2 et k_3 à l'aide des conditions initiales $x(0) = 5$, $x'(0) = 3$ et $x''(0) = 0$. Donc
$$\begin{cases} 5 = k_1 + k_2 \\ 3 = 2k_1 + k_3 \\ 0 = 4k_1 - k_2 \end{cases},$$
soit $k_1 = 1$,$k_2 = 4$ et $k_3 = 1$. D'où :

$$x(t) = e^{2t} + 4\cos t + \sin t.$$

2) L'équation s'écrit $x^{(3)}(t) - 2x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 2t^2$ (1), et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = \varphi(t) + x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1)
$\varphi^{(3)}(t) - 2\varphi''(t) + \varphi'(t) - 2\varphi(t) = 0$ (2) et $x^*(t)$ une solution particulière de (1). (2) est l'équation de l'exercice précédent, donc

$$\varphi(t) = k_1e^{2t} + k_2\cos t + k_3\sin t.$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t) = C_1t^2 + C_2t + C_3$ et on détermine C_1, C_2 et C_3 en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1):

$-2(2C_1) + (2C_1t + C_2) - 2(C_1t^2 + C_2t + C_3) = 2t^2$, soit

$t^2(-2C_1 - 2) + t(2C_1 - 2C_2) + (-4C_1 + C_2 - 2C_3) = 0$. Donc $C_1 = -1$, $C_2 = -1$, $C_3 = -\frac{3}{2}$, $x^*(t) = -t^2 - t - \frac{3}{2}$ et

$$x(t) = k_1e^{2t} + k_2\cos t + k_3\sin t - t^2 - t - \frac{3}{2}.$$

On détermine k_1, k_2 et k_3 à l'aide des conditions initiales $x(0) = \frac{5}{2}$, $x'(0) = 2$ et $x''(0) = 1$. Donc

$$\begin{cases} \frac{5}{2} = k_1 + k_2 - \frac{3}{2} \\ 2 = 2k_1 + k_3 - 1 \\ 0 = 4k_1 - k_2 - 2 \end{cases},$$

soit $k_1 = \frac{3}{5}$,$k_2 = \frac{2}{5}$ et $k_3 = \frac{9}{5}$. D'où :

$$x(t) = \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}\cos t + \frac{9}{5}\sin t - t^2 - t - \frac{3}{2}.$$

3) L'équation s'écrit $x^{(3)}(t) - x''(t) + x'(t) - x(t) = 2e^t \quad (1)$, et d'après le cours les solutions de (1) sont de la forme

$$x(t) = \varphi(t) + x^*(t),$$

où φ est solution de l'équation homogène associée à (1)

$\varphi^{(3)}(t) - \varphi''(t) + \varphi'(t) - \varphi(t) = 0 \quad (2)$ et $x^*(t)$ une solution particulière de (1).

L'équation caractéristique associée à (2) est : $r^3 - r^2 + r - 1 = 0 \quad (3)$, soit $(r-1)(r^2+1) = 0$. (3) a pour solutions $r_1 = 1$, $r_2 = i$ et $r_3 = -i$.

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t) = k_1e^t + k_2\cos t + k_3\sin t.$$

D'autre part on cherche $x^*(t)$ de la forme $x^*(t) = Cte^t$ (il y a résonance) et on détermine C en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1):

$(3Ce^t + Cte^t) - (2Ce^t + Cte^t) + (Ce^t + Cte^t) - Cte^t = 2e^t$, soit $e^t(3C - 2C + C - 2) = 0$, $C = 1$ et $x^*(t) = te^t$. Donc

$$x(t) = k_1e^t + k_2\cos t + k_3\sin t + te^t.$$

On détermine k_1, k_2 et k_3 à l'aide des conditions initiales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ et $x''(0) = 1$. Donc

$$\begin{cases} 1 = k_1 + k_2 \\ 0 = k_1 + k_3 + 1 \\ 1 = k_1 - k_2 + 2 \end{cases},$$

soit $k_1 = 0$,$k_2 = 1$ et $k_3 = -1$. D'où :

$$x(t) = \cos t - \sin t + te^t.$$

4. Soit le système différentiel (1) $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t) - y(t) + 2 \\ y'(t) = x(t) + y(t) - 2t \end{array} \right.$.

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $F(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2t \end{pmatrix}$. (1) s'écrit

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \quad (3)$$

Réduction de A

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = (1+i-\lambda)(1-i-\lambda)$

Ici on est amené à travailler sur $\mathbb{C}$, mais il faudra déterminer parmi toutes les solutions complexes, celles qui sont réelles.

A a donc deux valeurs propres distinctes, $\lambda_1 = 1+i$ avec $m(\lambda_1) = 1$ et $\lambda_2 = 1-i$ avec $m(\lambda_2) = 1$. A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_1} associé à $\lambda_1 = 1+i$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_1 V\}$, soit

$\left\{ \begin{array}{l} x - y = (1+i)x \\ x + y = (1+i)y \end{array} \right.$, ou $x = iy$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

E_{λ_1} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} associé à $\lambda_2 = 1-i$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}$, soit

$\left\{ \begin{array}{l} x - y = (1-i)x \\ x + y = (1-i)y \end{array} \right.$, ou $y = ix$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_2} est donc engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (= i \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix})$.

On en déduit alors que

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

D'après l'énoncé

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

(3) s'écrit alors $X'(t) = (PDP^{-1})X(t) + F(t)$ ou $(P^{-1}X'(t)) = D(P^{-1}X(t)) + P^{-1}F(t)$.

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z(t) = P^{-1}X(t)$, (3) devient

$$Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}F(t) \quad (4)$$

et $P^{-1}F(t) = \begin{pmatrix} -i-t \\ 1+it \end{pmatrix}$.

Posons $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, (4) s'écrit $\begin{cases} u'(t) = (1+i)u(t) - i - t \ \ (5) \\ v'(t) = (1-i)y + 1 + it \ \ (6) \end{cases}$

Résolution de (5)

L'équation homogène associée à (5) est $\varphi'(t) = (1+i)\varphi(t)$, et dans $\mathbb{C}$, $\varphi(t) = k_1 e^{(1+i)t}$.
Une solution particulière de (5) est de la forme $u^*(t) = C_1 t + C_2$.
On détermine C_1 et C_2 en écrivant que $u^*(t)$ est solution de (5):
$C_1 = (1+i)(C_1 t + C_2) - i - t$, soit $t(-(1+i)C_1 + 1) + (C_1 - (1+i)C_2 + i) = 0$.
Donc $C_1 = \frac{1-i}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$ et $u^*(t) = \frac{1-i}{2}t + \frac{1}{2}$. D'où

$$u(t) = k_1 e^{(1+i)t} + \frac{1-i}{2}t + \frac{1}{2}.$$

Résolution de (6)

L'équation homogène associée à (5) est $\varphi'(t) = (1-i)\varphi(t)$, et dans $\mathbb{C}$, $\varphi(t) = k_2 e^{(1-i)t}$.
Une solution particulière de (6) est de la forme $v^*(t) = C_1 t + C_2$.
On détermine C_1 et C_2 en écrivant que $v^*(t)$ est solution de (6):
$C_1 = (1-i)(C_1 t + C_2) + 1 + it$, soit $t((i-1)C_1 - i) + (C_1 + (i-1)C_2 - 1) = 0$.
Donc $C_1 = \frac{1-i}{2}$, $C_2 = -\frac{i}{2}$ et $v^*(t) = \frac{1-i}{2}t - \frac{i}{2}$. D'où

$$v(t) = k_2 e^{(1-i)t} + \frac{1-i}{2}t - \frac{i}{2}.$$

D'o'ù $Z(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{(1+i)t} + \frac{1-i}{2}t + \frac{1}{2} \\ k_2 e^{(1-i)t} + \frac{1-i}{2}t - \frac{i}{2} \end{pmatrix}$ et

$$X(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{(1+i)t} + \frac{1-i}{2}t + \frac{1}{2} \\ k_2 e^{(1-i)t} + \frac{1-i}{2}t - \frac{i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik_1 e^{(1+i)t} + k_2 e^{(1-i)t} + t \\ k_1 e^{(1+i)t} + ik_2 e^{(1-i)t} + t + 1 \end{pmatrix}.$$

Il faut maintenant déterminer les complexes k_1 et k_2 correspondant aux solutions réelles.

Or $ik_1e^{(1+i)t} + k_2e^{(1-i)t} + t = e^t[(ik_1 + k_2)\cos t + (-k_1 - ik_2)\sin t]$ et
$k_1e^{(1+i)t} + ik_2e^{(1-i)t} = e^t[(k_1 + ik_2)\cos t + (k_1 + ik_2)\sin t]$.
Les solutions réelles correspondent à $ik_1 + k_2$ et $k_1 + ik_2$ réels. Or $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$. Donc si $\overline{k_1} = ik_2$, $k_1 + ik_2 \in \mathbb{R}$ et $\overline{ik_1} = -i\overline{k_1} = -i(ik_2) = k_2$ et on a aussi $ik_1 + k_2 \in \mathbb{R}$.
Il suffit donc que $\overline{k_1} = ik_2$ et les solutions réelles sont de la forme :
$X(t) = \begin{pmatrix} e^t(C_1\cos t - C_2\sin t) + t \\ e^t(C_2\cos t + C_1\sin t) + t + 1 \end{pmatrix}$ ou

$$\begin{cases} x(t) = e^t(C_1\cos t - C_2\sin t) + t \\ y(t) = e^t(C_2\cos t + C_1\sin t) + t + 1 \end{cases}$$

2)Soit le système différentiel (1) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2e^{2t} \\ y'(t) = -x(t) + y(t) + 2t + 2 \end{cases}$.

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et $F(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ +2t+2 \end{pmatrix}$. (1) s'écrit

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \quad (3)$$

Réduction de A

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2).$

A a donc deux valeurs propres distinctes, $\lambda_1 = 0$ avec $m(\lambda_1) = 1$ et $\lambda_2 = 2$ avec $m(\lambda_2) = 1$.
A est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Dtermination du sous-espace propre E_{λ_1} associé à $\lambda_1 = 0$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \iff \{AV = 0\}$, soit

$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$, ou $x = y$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \iff \{V = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

E_{λ_1} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} associé à $\lambda_2 = 2$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \iff \{AV = \lambda_2 V\}$, soit

$\begin{cases} x - y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases}$, ou $y = -x$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$

E_{λ_2} est donc engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On en déduit alors que

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après l'énoncé

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) s'écrit alors $X'(t) = (PDP^{-1})X(t) + F(t)$ ou $(P^{-1}X'(t)) = D(P^{-1}X(t)) + P^{-1}F(t)$.

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z(t) = P^{-1}X(t)$, (3) devient

$$Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}F(t) \quad (4)$$

et $P^{-1}F(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} + t + 1 \\ e^{2t} - t - 1 \end{pmatrix}$.

Posons $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, (4) s'écrit $\begin{cases} u'(t) = e^{2t} + t + 1 & (5) \\ v'(t) = 2v(t) + e^{2t} - t - 1 & (6) \end{cases}$

Résolution de (5)

$$u(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + t + k_1.$$

Résolution de (6)

L'équation homogène associée à (6) est $\varphi'(t) = 2\varphi(t)$, et $\varphi(t) = k_2e^{2t}$.

Une solution particulière de (6) est de la forme $v^*(t) = C_1te^{2t} + C_2t + C_3$.

On détermine C_1, C_2 et C_3 en écrivant que $v^*(t)$ est solution de (6):

$C_1e^{2t} + 2C_1te^{2t} + C_2 = 2(C_1te^{2t} + C_2t + C_3) + e^{2t} - t - 1$, soit

$e^{2t}(C_1 - 1) + t(-2C_2 + 1) + (C_2 - 2C_3 + 1) = 0$.

Donc $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = \frac{3}{4}$ et $v^*(t) = te^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$. D'où

$$v(t) = k_2e^{2t} + te^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}.$$

D'o'ù $Z(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + t + k_1 \\ k_2e^{2t} + te^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et

$X(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + t + k_1 \\ k_2e^{2t} + te^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(\frac{1}{2} + k_2 + t) + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4} + k_1 \\ e^{2t}(\frac{1}{2} - k_2 - t) + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + k_1 \end{pmatrix}.$

On peut déterminer les constantes k_1 et k_2 à l'aide des conditions initiales (inexistantes ici).

3)Le système différentiel s'écrit : (1) $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -x(t) - 2z(t) \\ y'(t) = -y(t) + 4z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) - z(t) \end{array}\right.$.

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. (1) s'écrit

$$X'(t) = AX(t) \quad (3)$$

Réduction de A

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -2 \\ 0 & (-1-\lambda) & 4 \\ 2 & 2 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-3-\lambda)(1-\lambda).$$

A a donc trois valeurs propres distinctes, $\lambda_1 = -1$ avec $m(\lambda_1) = -1$, $\lambda_2 = -3$ avec $m(\lambda_2) = 1$ et $\lambda_3 = 1$ avec $m(\lambda_3) = 1$. A est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_1} associé à $\lambda_1 = -1$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_1 V\}$, soit

$\left\{\begin{array}{l} -x - 2z = -x \\ -y + 4z = -y \\ 2x + 2y - z = -z \end{array}\right.$, ou $\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ y = -x \end{array}\right.$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

E_{λ_1} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} associé à $\lambda_2 = -3$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}$, soit

$\left\{\begin{array}{l} -x - 2z = -3x \\ -y + 4z = -3y \\ 2x + 2y - z = -3z \end{array}\right.$, ou $\left\{\begin{array}{l} z = x \\ y = -2x \end{array}\right.$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_2} est donc engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_3} associé à $\lambda_3 = 1$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_3 V\}$, soit

$\begin{cases} -x - 2z = x \\ -y + 4z = y \\ 2x + 2y - z = z \end{cases}$, ou $\begin{cases} x = -z \\ y = 2z \end{cases}$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_3} est donc engendré par $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit alors que

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) s'écrit alors $X'(t) = (PDP^{-1})X(t)$ ou $(P^{-1}X'(t)) = D(P^{-1}X(t))$.

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z(t) = P^{-1}X(t)$, (3) devient

$$Z'(t) = DZ(t) \quad (4).$$

Posons $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, (4) s'écrit $\begin{cases} u'(t) = -u(t) \ \ (5) \\ v'(t) = -3v(t) \ \ (6) \\ w'(t) = w(t) \ \ (7) \end{cases}$

Résolution de (5)

$$u(t) = k_1 e^{-t}.$$

Résolution de (6)

$$v(t) = k_2 e^{-3t}.$$

Résolution de (7)

$$w(t) = k_3 e^{t}.$$

D'o'ù $Z(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{-t} \\ k_2 e^{-3t} \\ k_3 e^{t} \end{pmatrix}$ et

$$X(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1e^{-t} \\ k_2e^{-3t} \\ k_3e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1e^{-t} + k_2e^{-3t} - k_3e^{t} \\ -k_1e^{-t} - 2k_2e^{-3t} + 2k_3e^{t} \\ k_2e^{-3t} + k_3e^{t} \end{pmatrix}.$$

On peut déterminer les constantes k_1, k_2 et k_3 à l'aide des conditions initiales (inexistantes ici).

4)Le système différentiel s'écrit : (1) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + y(t) - z(t) \end{cases}$.

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (1) s'écrit

$$X'(t) = AX(t) \quad (3)$$

Réduction de A

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 & 4 \\ 3 & (2-\lambda) & -1 \\ 2 & 1 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda).$$

A a donc trois valeurs propres distinctes, $\lambda_1 = 1$ avec $m(\lambda_1) = 1$, $\lambda_2 = -3$ avec $m(\lambda_2) = 1$ et $\lambda_3 = 3$ avec $m(\lambda_3) = 1$. A est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_1} associé à $\lambda_1 = 1$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_1 V\}$, soit

$\begin{cases} x - y + 4z = x \\ 3x + 2y - z = y \\ 2x + y - z = z \end{cases}$, ou $\begin{cases} x = -z \\ y = 4z \end{cases}$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} -z \\ 4z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_1} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} associé à $\lambda_2 = -2$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}$, soit

$\begin{cases} x - y + 4z = -2x \\ 3x + 2y - z = -2y \\ 2x + y - z = -2z \end{cases}$, ou $\begin{cases} z = -x \\ y = -x \end{cases}$ et

$$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

E_{λ_2} est donc engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_3} associé à $\lambda_3 = 3$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_3 V\}$, soit

$\begin{cases} x - y + 4z = 3x \\ 3x + 2y - z = 3y \\ 2x + y - z = 3z \end{cases}$, ou $\begin{cases} z = x \\ y = 2x \end{cases}$ et

$$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

E_{λ_3} est donc engendré par $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit alors que

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) s'écrit alors $X'(t) = (PDP^{-1})X(t)$ ou $(P^{-1}X'(t)) = D(P^{-1}X(t))$.

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z(t) = P^{-1}X(t)$, (3) devient

$$Z'(t) = DZ(t) \quad (4).$$

Posons $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, (4) s'écrit $\begin{cases} u'(t) = u(t) \ \ (5) \\ v'(t) = -2v(t) \ \ (6) \\ w'(t) = 3w(t) \ \ (7) \end{cases}$

Résolution de (5)

$$u(t) = k_1 e^t.$$

Résolution de (6)

$$v(t) = k_2 e^{-2t}.$$

Résolution de (7)

$$w(t) = k_3 e^{3t}.$$

D'o'ù $Z(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^t \\ k_2 e^{-2t} \\ k_3 e^{3t} \end{pmatrix}$ et

$X(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^t \\ k_2 e^{-2t} \\ k_3 e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 e^t + k_2 e^{-2t} + k_3 e^{3t} \\ 4k_1 e^t - k_2 e^{-2t} + 2k_3 e^{3t} \\ k_1 e^t - k_2 e^{-2t} + k_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$

On peut déterminer les constantes k_1, k_2 et k_3 à l'aide des conditions initiales (inexistantes ici).

5. Soit (1) : $x''(t)+2x'(t)-bx(t) = 0$. Equation caractéristique associée à (3) : $r^2+2r-b = 0$
   (3) s'écrit $(r+1)^2 - (1+b) = 0$

   • Si $b > -1$, (3) a 2 racines réelle distinctes, $r_1 = -1 - \sqrt{1+b}$ et $r_2 = -1 + \sqrt{1+b}$ et (1) a pour solutions:
   $$x(t) = k_1 e^{-(1+\sqrt{1+b})t} + k_2 e^{-(1-\sqrt{1+b})t}.$$
   (1) est stable si et seulement si $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$ soit $-1 < b < 0$.

   $$\text{Si} \quad -1 < b < 0 \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 \quad \text{et la solution est stable.}$$

   $$\text{Si} \quad b > 0 \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty \quad \text{et la solution est instable.}$$

   • Si $b < -1$, (3) a 2 racines complexes conjuguées $r_1 = -1 - i\sqrt{-1-b}$ et $r_2 = -1 + i\sqrt{-1-b}$ et (1) a pour solutions complexes :
   $$x(t) = k_1 e^{-(1+i\sqrt{-1-b})t} + k_2 e^{-(1-i\sqrt{-1-b})t}.$$
   avec k_1 et k_2 constantes complexes.
   Les solutions réelles sont de la forme :
   $$x(t) = e^{-t}(C_1 \cos(\sqrt{-1-b}t) + C_2 \sin(\sqrt{-1-b}t))$$
   et
   $$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 \quad \text{et la solution est stable.}$$

6. On a
   $$TrA = \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \quad \text{et} \quad \det A = \lambda_1\lambda_2 = 1.$$
   A a donc deux valeurs propres de partie réelle négative. A est donc différentiellement stable.

   $$TrB = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad \text{et} \quad \det B = \lambda_1\lambda_2 = 2.$$

B a donc deux valeurs propres de partie réelle positive. B n'est donc pas différentiellement stable.

7. $P_C(\lambda) = (-1-\lambda)(\lambda^2+(1-a)\lambda+1-a)$. C est donc différentiellement stable si et seulement si les racines de (1) $\lambda^2 + (1-a)\lambda + 1 - a$ ont des parties réelles négatives.

   $\Delta = (1-a)^2 - 4(1-a) = (1-a)(-3-a)$

   • Si $a \in]-\infty; -3[\bigcup]1; +\infty[$, $\Delta > 0$ et les racines λ_1 et λ_2 de (1) vérifient $\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = 1-a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = a-1 \end{cases}$.

   • Si $a < -3$, $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$. A est donc stable.

   • Si $a > 1$, λ_1 et λ_2 sont de signes contraires, donc A est instable (l'une des valeurs propres est positive).

   • Si $-3 < a < 1$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ et $\Re e(\lambda_1) = \Re e(\lambda_2) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \frac{a-1}{2} < 0$. A est différentiellement stable.

   • Si $a = -3$ ou $a = 1$, l'une au moins des valeurs propres de A est nulle et A n'est pas différentiellement stable.

8. Soit le système différentiel (1) $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + 2\sin t + e^{-t} \\ y'(t) = -5x(t) + 4y(t) - \frac{1}{2}z(t) + 3\sin t + 2e^{-t} + t \\ z'(t) = -7x(t) + 5y(t) - \frac{1}{2}z(t) + \sin t + 2e^{-t} + 2t \\ x(0) = -\frac{1}{6} \ , \ y(0) = 1 \ , \ z(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$.

   Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -7 & 5 & -\frac{1}{2}z(t) \end{pmatrix}$, et $F(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t + e^{-t} \\ 3\sin t + 2e^{-t} + t \\ \sin t + 2e^{-t} + 2t \end{pmatrix}$.

   (1) s'écrit
   $$X'(t) = AX(t) + F(t) \quad (3)$$

   Réduction de A

   D'après l'exercice **14** du chapitre précédent :

   $$A = PJP^{-1}, \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   et
   $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (3) s'écrit alors $X'(t) = (PJP^{-1})X(t) + F(t)$ ou $(P^{-1}X'(t)) = J(P^{-1}X(t)) + P^{-1}F(t)$.

   Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z(t) = P^{-1}X(t)$, (3) devient

$$Z'(t) = PZ(t) + P^{-1}F(t) \quad (4)$$

et $P^{-1}F(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Posons $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, (4) s'écrit $\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) + e^{-t} \quad (5) \\ v'(t) = v(t) + t \quad (6) \\ w'(t) = \frac{1}{2}w(t) + \sin t \quad (7) \end{cases}$

Résolution de (7)

L'équation homogène associée à (7) est $\varphi'(t) = \frac{1}{2}\varphi(t)$, et $\varphi(t) = k_1 e^{\frac{1}{2}t}$.

Donc $w(t) = k_1 e^{\frac{1}{2}t} + w^*(t)$, où $w^*(t)$ est une solution particulière de (7) de la forme $w^*(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. On détermine C_1 et C_2 en écrivant que $w^*(t)$ est solution de (7) :

$C_1 \cos t - C_2 \sin t = \frac{1}{2}(C_1 \sin t + C_2 \cos t) + \sin t$, ou $\cos t(C_1 - \frac{C_2}{2}) + \sin t(-C_2 - \frac{C_1}{2} - 1) = 0$. D'où $C_1 = -\frac{2}{5}$ et $C_2 = -\frac{4}{5}$. Donc

$$w(t) = k_1 e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t.$$

Résolution de (6)

L'équation homogène associée à (6) est $\varphi'(t) = \varphi(t)$, et $\varphi(t) = k_2 e^t$.

Donc $v(t) = k_2 e^t + v^*(t)$, où $v^*(t)$ est une solution particulière de (6) de la forme $v^*(t) = C_1 t + C_2$. On détermine C_1 et C_2 en écrivant que $v^*(t)$ est solution de (6) :

$C_1 = (C_1 t + C_2) + t$, ou $t(-C_1 - 1) + (C_1 - C_2) = 0$. D'où $C_1 = -1 = C_2$. Donc

$$v(t) = k_2 e^t - t - 1.$$

Résolution de (5)

(5) devient (8) $u'(t) = u(t) + k_2 e^t - t - 1 + e^{-t}$.
L'équation homogène associée à (8) est $\varphi'(t) = \varphi(t)$, et $\varphi(t) = k_3 e^t$.

Donc $u(t) = k_3 e^t + u^*(t)$, où $u^*(t)$ est une solution particulière de (8) de la forme $u^*(t) = C_1 t e^t + C_2 t + C_3 + C_4 e^{-t}$ (il y a résonance). On détermine C_1, C_2, C_3 et C_4 en écrivant que $u^*(t)$ est solution de (8) :

$C_1 e^t + C_1 t e^t + C_2 - C_4 e^{-t} = C_1 t e^t + C_2 t + C_3 + C_4 e^{-t} + k_2 e^t - t - 1 + e^{-t}$, ou
$e^t(C_1 - k_2) + t(-C_2 + 1) + (C_2 - C_3 + 1) + e^{-t}(-C_4 - C_4 - 1) = 0$.
D'où $C_1 = k_2$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2$ et $C_4 = -\frac{1}{2}$. Donc $u^*(t) = k_2 t e^t + t + 2 - \frac{1}{2}e^{-t}$ et

$$u(t) = k_3e^t + k_2te^t + t + 2 - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

D'où $Z(t) = \begin{pmatrix} k_3e^t + k_2te^t + t + 2 - \frac{1}{2}e^{-t} \\ k_2e^t - t - 1 \\ k_1e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t \end{pmatrix}$ et

$X(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_3e^t + k_2te^t + t + 2 - \frac{1}{2}e^{-t} \\ k_2e^t - t - 1 \\ k_1e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t \end{pmatrix}$,

$X(t) = \begin{pmatrix} k_3e^t + k_2te^t + t + 2 - \frac{1}{2}e^{-t} + 2(k_1e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t) \\ 2(k_3e^t + k_2te^t + t + 2 - \frac{1}{2}e^{-t}) + k_2e^t - t - 1 + 3(k_1e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t) \\ 2(k_3e^t + k_2te^t + t + 2 - \frac{1}{2}e^{-t}) + 2(k_2e^t - t - 1) + k_1e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t \end{pmatrix}$.

On détermine les constantes k_1, k_2 et k_3 à l'aide des conditions initiales $x(0) = -\frac{1}{6}$, $y(0) = 1$ et $z(0) = \frac{1}{3}$, soit $\begin{cases} -\frac{1}{6} = k_3 + 2 - \frac{1}{2} + 2k_1 - \frac{8}{5} \\ 1 = 2k_3 + 4 - 1 + k_2 - 1 + 3k_1 - \frac{12}{5} \\ \frac{1}{3} = 2k_3 + 4 - 1 + 2k_2 - 2 + k_1 - \frac{4}{5} \end{cases}$, ce qui donne

$k_1 = \frac{14}{5}$, $k_2 = \frac{13}{3}$ et $k_3 = -\frac{17}{3}$ et

$$\begin{cases} x(t) = e^t(-\frac{17}{3} + \frac{13}{3}t) + t + 2 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{28}{5}e^{\frac{1}{2}t} - \frac{4}{5}\sin t - \frac{8}{5}\cos t \\ y(t) = e^t(-7 + \frac{13}{3}t) + t + 3 - e^{-t} + \frac{42}{5}e^{\frac{1}{2}t} - \frac{6}{5}\sin t - \frac{12}{5}\cos t \\ z(t) = e^t(-\frac{8}{3} + \frac{26}{3}t) + 2 - e^{-t} + \frac{14}{5}e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t \end{cases}$$

9. Soit le système différentiel (1) $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + t + 2e^t \\ y'(t) = -x(t) + y(t) - t - e^t \\ z'(t) = x(t) + y(t) - -z(t) \\ x(0) = -2 \ , \ y(0) = 2 \ , \ z(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et $F(t) = \begin{pmatrix} t + 2e^t \\ -t - e^t \end{pmatrix}$. Les deux premières équations de (1) s'écrivent

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \quad (3)$$

Réduction de A

D'après l'exercice **10** du chapitre précédent :

$$A = PJP^{-1}, \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

et on calcule par la formule de l'énoncé

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) s'écrit alors $X'(t) = (PJP^{-1})X(t) + F(t)$ ou $(P^{-1}X'(t)) = J(P^{-1}X(t)) + P^{-1}F(t)$.

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z(t) = P^{-1}X(t)$, (3) devient

$$Z'(t) = PZ(t) + P^{-1}F(t) \quad (4)$$

et $P^{-1}F(t) = \begin{pmatrix} t+e^t \\ e^t \end{pmatrix}$.

Posons $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, (4) s'écrit $\begin{cases} u'(t) = 2u(t) + v(t) + t + e^t \quad (5) \\ v'(t) = 2v(t) + e^t \quad (6) \end{cases}$

Résolution de (6)

L'équation homogène associée à (6) est $\varphi'(t) = 2\varphi(t)$, et $\varphi(t) = k_1e^{2t}$.

Donc $v(t) = k_1e^{2t} + v^*(t)$, où $v^*(t)$ est une solution particulière de (6) de la forme $v^*(t) = Ce^t$. On détermine C en écrivant que $v^*(t)$ est solution de (6) :

$Ce^t = 2Ce^t + e^t$, ou $e^t(C - 2C - 1) = 0$. D'où $C = -1$ et $v^*(t) = -e^t$. Donc

$$v(t) = k_1e^{2t} - e^t.$$

Résolution de (5)

(5) devient (7) $u'(t) = 2u(t) + k_1e^{2t} + t$.
L'équation homogène associée à (7) est $\varphi'(t) = 2\varphi(t)$, et $\varphi(t) = k_2e^{2t}$.

Donc $u(t) = k_2e^{2t} + u^*(t)$, où $u^*(t)$ est une solution particulière de (8) de la forme $u^*(t) = C_1te^{2t} + C_2t + C_3$ (il y a résonance). On détermine C_1, C_2 et C_3 en écrivant que $u^*(t)$ est solution de (7) :

$C_1e^{2t} + 2C_1te^{2t} + C_2 = 2(C_1te^{2t} + C_2t + C_3) + k_1e^{2t} + t$, ou
$e^{2t}(C_1 - k_1) + t(-2C_2 - 1) + (C_2 - 2C_3) = 0$. D'où $C_1 = k_1$, $C_2 = -\frac{1}{2}$ et $C_3 = -\frac{1}{4}$.
Donc $u^*(t) = k_1te^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$ et

$$u(t) = k_2e^{2t} + k_1te^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}.$$

D'où $Z(t) = \begin{pmatrix} k_2e^{2t} + k_1te^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ k_1e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$ et

$X(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2e^{2t} + k_1te^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ k_1e^{2t} - e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2e^{2t} + k_1te^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + k_1e^{2t} - e^t \\ -k_2e^{2t} - k_1te^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

On détermine les constantes k_1 et k_2 à l'aide des conditions initiales $x(0) = -2$ et $y(0) = 2$, soit $\begin{cases} -2 = k_2 - \frac{1}{4} + k_1 - 1 \\ 2 = -k_2 + \frac{1}{4} \end{cases}$, ce qui donne $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{7}{4}$ et

$$\begin{cases} x(t) = (-\frac{3}{4} + t)e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} - e^t \\ y(t) = (\frac{7}{4} - t)e^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{cases}$$

D'autre part $z'(t) = x(t) + y(t) - z(t)$, soit

$$z'(t) = -z(t) + e^{2t} - e^{t} \quad (8).$$

Donc $z(t) = k_3 e^{-t} + z^*(t)$, où $z^*(t)$ est une solution particulière de (8) de la forme $z^*(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t}$. On détermine C_1 et C_2 en écrivant que $z^*(t)$ est solution de (8) :

$2C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} = -(C_1 e^{2t} + C_2 e^{t}) + e^{2t} - e^{t}$, ou $e^{2t}(2C_1 + C_1 - 1) + e^{t}(C_2 + C_2 + 1) = 0$.
D'où $C_1 = \frac{1}{3}$ et $C_2 = -\frac{1}{2}$. Donc $z^*(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}$ et

$$z(t) = k_3 e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}.$$

On détermine k_3 en utilisant la condition initiale $z(0) = \frac{1}{2}$:
$\frac{1}{2} = k_3 + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}$ et $k_3 = \frac{2}{3}$ et

$$z(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}.$$

10. 1) **Réduction de** A

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} (-4-\lambda) & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2.$$

A a une valeur propre $\lambda = -2$ avec $m(\lambda) = 2$.

Détermination du sous-espace propre E_λ **associé à** $\lambda = -2$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda V\}$, soit

$\begin{cases} -4x + 4y = -2x \\ -x = -2y \end{cases}$, ou $x = 2y$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et A n'est pas digonalisable et a pour réduite de Jordan $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Détermination d'un vecteur de Jordan associé à V_1

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur de Jordan associé à V_1 $\} \Longleftrightarrow \{AV = V_1 + \lambda V\}$, soit

$\begin{cases} -4x + 4y = 2 - 2x \\ -x = 1 - 2y \end{cases}$, ou $x = 2y - 1$ et $\{V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

On en déduit alors que

$$A = PJP^{-1}, \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après l'énoncé

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) La première équation (1) du système peut etre résolue, en effet : $x(t) = k_1 e^t + x^*(t)$, où $x^*(t)$ est une solution particulière de (1) de la forme $x^*(t) = C_1 e^{3t} + C_2$. On détermine C_1 et C_2 en écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1) :

$3C_1e^{3t} = C_1e^{3t} + C_2 + 2C_1e^{3t} + 1$ ou $e^{3t}(3C_1 - C_1 - 2) + (-C_2 - 1) = 0$. D'où $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ et $x^*(t) = e^{3t} - 1$. Donc

$$x(t) = k_1 e^t + e^{3t} - 1.$$

On détermine k_1 en utilisant la condition initiale $x(0) = 1$:

$1 = k_1 + 1 - 1$, d'ou $k_1 = 1$ et

$$x(t) = e^t + e^{3t} - 1.$$

Si on considère les deux dernières équations du système en remplaçant $x(t)$ par sa valeur $e^t + e^{3t} - 1$, on obtient :

(2)

$$\begin{cases} y'(t) = -4y(t) + 4z(t) + e^t + 4t + 6 \\ z'(t) = -y(t) + 2e^t + 2t + 2 \\ y(0) = 3 \ , \ z(0) = 2 \end{cases}$$

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et $F(t) = \begin{pmatrix} e^t + 4t + 6 \\ 2e^t + 2t + 2 \end{pmatrix}$. On a

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \quad (3)$$

(3) s'écrit alors $X'(t) = (PJP^{-1})X(t) + F(t)$ ou $(P^{-1}X'(t)) = J(P^{-1}X(t)) + P^{-1}F(t)$.

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z(t) = P^{-1}X(t)$, (3) devient

$$Z'(t) = JZ(t) + P^{-1}F(t) \quad (4)$$

et $P^{-1}F(t) = \begin{pmatrix} -e^t + 2t + 4 \\ 3e^t - 2 \end{pmatrix}$.

Posons $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, (4) s'écrit $\begin{cases} u'(t) = -2u(t) + v(t) - e^t + 2t + 4 & (5) \\ v'(t) = -2v(t) + 3e^t - 2 & (6) \end{cases}$

Résolution de (6)

L'équation homogène associée à (6) est $\varphi'(t) = -2\varphi(t)$, et $\varphi(t) = k_1 e^{-2t}$.

Une solution particulière de (6) est de la forme $v^*(t) = C_1 e^t + C_2$.
On détermine C_1 et C_2 en écrivant que $v^*(t)$ est solution de (6):
$C_1 e^t = -2(C_1 e^t + C_2) + 3e^t - 2$, soit $e^t(C_1 + 2C_1 - 3) + t(2C_2 + 2) = 0$.
Donc $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ et $v^*(t) = e^t - 1$. D'où

$$v(t) = k_1 e^{-2t} + e^t - 1.$$

Résolution de (5)

(5) s'écrit (7) : $u'(t) = -2u(t) + k_1 e^{-2t} + 2t + 3$.
L'équation homogène associée à (7) est $\varphi'(t) = -2\varphi(t)$, et $\varphi(t) = k_2 e^{-2t}$.
Une solution particulière de (7) est de la forme $u^*(t) = C_1 t e^{-2t} + C_2 t + C_3$ (il y a résonance).
On détermine C_1, C_2 et C_3 en écrivant que $u^*(t)$ est solution de (7):
$C_1 e^{-2t} - 2C_1 t e^{-2t} + C_2 = -2(C_1 t e^{-2t} + C_2 t + C_3) + k_1 e^{-2t} + 2t + 3$, soit
$e^{-2t}(C_1 - k_1) + t(2C_2 - 2) + (C_2 + 2C_3 - 3) = 0$.
Donc $C_1 = k_1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$ et $u^*(t) = te^{-2t} + t + 1$. D'où

$$u(t) = k_2 e^{-2t} + te^{-2t} + t + 1.$$

Et $Z(t) = \begin{pmatrix} k_2 e^{-2t} + te^{-2t} + t + 1 \\ k_1 e^{-2t} + e^t - 1 \end{pmatrix}$, donc

$X(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 e^{-2t} + te^{-2t} + t + 1 \\ k_1 e^{-2t} + e^t - 1 \end{pmatrix}$

$X(t) = \begin{pmatrix} 2(k_2 e^{-2t} + te^{-2t} + t + 1) + (k_1 e^{-2t} + e^t - 1) \\ (k_2 e^{-2t} + te^{-2t} + t + 1) + (k_1 e^{-2t} + e^t - 1) \end{pmatrix}$.

On détermine les constantes k_1 et k_2 à l'aide des conditions initiales $y(0) = 3$ et $z(0) = 2$, soit $\begin{cases} 3 = 2k_2 + 2 + k_1 + 1 - 1 \\ 2 = k_2 + 1 + k_1 + 1 - 1 \end{cases}$, ce qui donne

$k_1 = 1$, $k_2 = 0$ et

$$\begin{cases} y(t) = (1 + 2t)e^{-2t} + 2t + 1 + e^t \\ z(t) = (1 + t)e^{-2t} + t + e^t \end{cases}$$