Leçon 05 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 6 : Résoudre $\begin{cases} x'_1(t) = x_1(t)-x_2(t)+x_3(t) \\ x'_2(t) = x_1(t)+2x_2 \\ x'_3(t) = x_2(t) \end{cases}$

Solution

Ce système s'écrit X'(t) = AX(t) avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $P(\lambda) = -\lambda\,(1-\lambda)(2-\lambda) + 1 - \lambda = (1-\lambda)(\lambda^2 -2\lambda+1) = (1-\lambda)^3$.

$\lambda = 1$ est donc valeur propre triple de A.

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si $\begin{cases} x-y+z = x \\ x+2y = y \\ y = z \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases}$ et $V = x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre et le sous espace propre associé à $\lambda = 1$ est engendré par P_1 et est de dimension 1.

La matrice la plus simple semblable à A est donc la matrice de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à déterminer la matrice de passage P. Le 1er vecteur colonne de P est bien sûr P_1 , quant aux deux autres ceux sont les vecteurs de Jordan $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $P_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ déterminés par : $\begin{cases} AP_2 = P_1 + P_2 \\ AP_3 = P_2 + P_3 \end{cases}$,

$AP_2 = P_1 + P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - y_2 + z_2 = -1 + x_2 \\ x_2 + 2y_2 = 1 + y_2 \\ y_2 = 1 + z_2 \end{cases}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

$AP_3 = P_2 + P_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - y_3 + z_3 = 1 + x_3 \\ x_3 + 2y_3 = y_3 \\ y_3 = -1 + z_3 \end{cases}$ et $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

On obtient ainsi deux vecteurs de Jordan : $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $Z(t) = P^{-1} X(t)$. Nous sommes ramenés à résoudre : $Z'(t) = J\,Z(t)$ soit

$$\begin{cases} z'_1(t) = z_1(t)+z_2(t) \\ z'_2(t) = z_2(t)+z_3(t) \\ z'_3(t) = z_3(t) \end{cases}.$$

La dernière équation donne immédiatement : $\boxed{z_3(t) = k_3e^t}$

Et si on reporte dans la deuxième équation, on obtient :

$$(1)\ z'_2(t) = z_2(t) + k_3\, e^t,$$

équation du premier ordre dont la solution générale est de la forme

$$z_2(t) = k_2\, e^t + z^*_2(t)$$

où $z^*_2(t)$ une solution particulière.

$z^*_2(t)$ est de la forme ate^t (il y a résonance) et puisque z^*_2 vérifie (1) :

$ae^t + ate^t = ate^t + k_3\, e^t$ soit $a = k_3$ et $\boxed{z_2(t) = e^t(k_3t + k_2)}$.

Si on reporte maintenant dans la première équation, on a :

$$(2)\quad z'_1(t) = z_1(t) + e^t(k_3t + k_2) .$$

De même $z_1(t) = k_1\, e^t + z^*_1(t)$ avec $z^*_1(t)$ solution particulière de (2) de la forme $z^*_1(t) = te^t(at+b)$ (il y a résonance) .

Or $z^*_1(t)$ vérifie (2) donc $e^t(at^2+bt) + e^t(2at+b) = e^t(at^2+bt) + e^t(k_3t+k_2)$

et $a = \frac{k_3}{2}$ et $b = k_2$. D'où $z^*_1(t) = e^t(\frac{k_3}{2}t^2 + k_2t)$ et

$$\boxed{z_1(t) = e^t(\frac{k_3}{2}t^2 + k_2t + k_1)} .$$

Or $X(t) = PZ(t)$, donc

$$\begin{cases} x_1(t) = -z_1(t) + z_2(t) \\ x_2(t) = z_1(t) \\ x_3(t) = z_1(t) - z_2(t) + z_3(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1(t) = e^t(-\frac{k_3}{2}t^2 + (k_3-a_2)t + k_2 - k_1) \\ x_2(t) = e^t(\frac{k_3}{2}t^2 + k_2t + k_1) \\ x_3(t) = e^t(\frac{k_3}{2}t^2 + (k_2-k_3)t + k_1 - k_2 + k_3) \end{cases}$$