Leçon 05 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 5 : Résoudre
$x^{(5)}(t) - x^{(4)}(t) + 2x^{(3)}(t) - 10x''(t) + 13x'(t) - 5x(t) = -5t + 3 + 13e^{2t}$ (1)

Solution

D'après le cours $x(t) = \varphi(t) + x^*(t)$, avec $\varphi(t)$ solution de l'équation homogène associée et $x^*(t)$ solution particulière de (1). Or d'après le résultat de **l'Exercez-vous 4**

$$\varphi(t) = e^{-t}(k_1\cos 2t + k_2\sin 2t) + k_3e^t + k_4te^t + k_5e^t.$$

Et on peut choisir $x^*(t)$ est de la forme $x^*(t) = at + b + ce^{2t}$ et déterminer a, b et c en écrivant que $x^*(t)$ est solution de (1).

$x^*(t) = at + b + ce^{2t}$ $\times (-5)$
$x^{*\prime}(t) = a + 2ce^{2t}$ $\times 13$
$x^{*\prime\prime}(t) = 4ce^{2t}$ $\times (-10)$
$x^{*(3)}(t) = 8ce^{2t}$ $\times 2$
$x^{*(4)}(t) = 16\,ce^{2t}$ $\times (-1)$
$x^{*(5)}(t) = 32\,ce^{2t}$ $\times 1$
soit $t(-5a + 5) + (13a - 5b - 3) + e^{2t}(32c - 16c + 16c - 40c + 26c - 5c - 13) = 0$
D'où a = 1, b = 2 et c = 1 et $x^*(t) = t + 2 + e^{2t}$ et

$$x(t) = e^{-t}(k_1\cos 2t + k_2\sin 2t) + k_3e^t + k_4te^t + k_5e^t + t + 2 + e^{2t}.$$

Remarque : Il n'y a pas de conditions initiales pour déterminer les constantes.