Leçon 05 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 4 : Résoudre
$\varphi^{(5)}(t) - \varphi^{(4)}(t) + 2\varphi^{(3)}(t) - 10\varphi''(t) + 13\varphi'(t) - 5\varphi(t) = 0$ (2)

Solution

Cherchons les solutions de (2) de la forme e^{rt} . On sait alors que r est solution de l'équation caractéristique : $P(r) = r^5 - r^4 + 2r^3 - 10r^2 + 13r - 5 = 0$ (3).
1 est racine évidente de (3) et une division par $(r - 1)$ donne :
$P(r) = (r - 1)(r^4 + 2r^2 - 8r + 5)$.
1 est racine évidente de $r^4 + 2r^2 - 8r + 5$ et une division donne :
$P(r) = (r - 1)^2(r^3 + r^2 + 3r - 5)$.
1 est encore racine évidente de $r^3 + r^2 + 3r - 5$ et en divisant par $(r - 1)$ on obtient :
$P(r) = (r - 1)^3(r^2 + 2r + 5)$.

$r^2 + 2r + 5 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -16 = (4i)^2$ et pour solutions

$r_1 = -1 + 2i$ et $r_2 = \overline{r_1} = -1 - 2i$.
P(r) a pour solutions dans **C** : r_1, r_2 et $r_3 = 1$, avec $m(r_1) = m(r_2) = 1$ et $m(r_3) = 3$. D'après le

cours les solutions de (2) sont de la forme

$$\varphi(t) = e^{-t}(k_1\cos 2t + k_2\sin 2t) + k_3e^t + k_4te^t + k_5e^t.$$