Leçon 05 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 3 : 1) Résoudre : $\begin{cases} x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 4t + 3e^{-t} \\ x(0) = 1 \quad \text{et} \quad x'(0) = -6 \end{cases}$.

2) Résoudre (1) $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = t\sin t$.

Solution

1) Cherchons d'abord la solution générale de l'équation homogène(2) associée à (1) et résolvons l'équation caractéristique : (3) $r^2 - r - 2 = 0$. Soit $(r + 1)(r - 2) = 0$
Les solutions de (2) sont donc de la forme : $\varphi(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{2t}$.

Soit $x^*(t)$ une solution particulière de (1), alors $x(t) = \varphi(t) + x^*(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{2t} + x^*(t)$.

Cherchons $x^*(t)$ sous la forme $x^*(t) = at + b + Cte^{-t}$ (il y a résonance).
$x^{*\prime}(t) = a + Ce^{-t} - Cte^{-t}$ et $x^{*\prime\prime}(t) = -2Ce^{-t} + Cte^{-t}$.
En écrivant que $x^*(t)$ vérifie (1), on obtient :
$(-2Ce^{-t} + Cte^{-t}) - (a + Ce^{-t} - Cte^{-t}) - 2(at + b + Cte^{-t}) = 4t + 3^{e-t}$ et en ordonnant :
$te^{-t}(C + C - 2C) + e^{-t}(-2C - C - 3) + t(-2a - 4) + (-a - 2b) = 0$
D'où $C = -1$, $a = -2$ et $b = 1$ et $x^*(t) = -2t + 1 - te^{-t}$, donc

$$x(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{2t} - 2t + 1 - te^{-t}.$$

Les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = -6$ nous permettent de calculer k_1 et k_2.
$x'(t) = -k_1e^{-t} + 2k_2e^{2t} - 2 - e^{-t} + te^{-t}$, $x(0) = k_1 + k_2 + 1$ et $x'(0) = -k_1 + 2k_2 - 3$. D'où
$\begin{cases} k_1 + k_2 + 1 = 1 \\ -k_1 + 2k_2 - 3 = -6 \end{cases}$ et $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, donc

$$x(t) = e^{-t} - e^{2t} - 2t + 1 - e^{-t}$$

2) Cherchons d'abord la solution générale de l'équation homogène (2) associée à (1) et résolvons l'équation caractéristique : (3) $r^2 + 2r + 2 = 0$
$\Delta' = -1$ les solutions de (3) sont donc $r = -1+i$ et $\overline{r} = -1-i$. Les solutions réelles de (2) sont donc de la forme : $\varphi(t) = e^{-t}[k_1\cos t + k_2\sin t]$ (k_1 et k_2 réels)

Une solution particulière est de la forme : $x^*(t) = (at+b)\sin t + (ct+d)\cos t$.
$x^{*\prime}(t) = a\sin t + (at+b)\cos t + c\cos t - (ct+d)\sin t$
$x^{*\prime\prime}(t) = 2a\cos t - (at+b)\sin t - 2c\sin t - (ct + d)\cos t$
Or $x^*(t)$ vérifie (1), d'où :
$t\cos t(c+2a) + \cos t(2a + d + 2b + 2c) + t\sin t(a - 2c - 1) + \sin t(b - 2c + 2a - 2d) = 0$.

Soit $\begin{cases} c+2a=0 \\ a-2c=1 \\ 2a+2c+2b+d=0 \\ 2a+b-2c-2d=0 \end{cases}$ les 2 premières équations donnent : $a = \dfrac{1}{5}$ et $c = \dfrac{-2}{5}$ et en remplaçant dans les deux dernières équations, on obtient : $b = \dfrac{-2}{25}$ et $d = \dfrac{14}{25}$.

D'où $x^*(t) = (\frac{1}{5}t - \frac{2}{25})\sin t + (-\frac{2}{5}t - \frac{14}{25})\cos t$ et la solution générale de (1) est :

$$x(t) = e^{-t}(k_1\cos t + k_2\sin t) + (\frac{1}{5}t - \frac{2}{25})\sin t + (-\frac{2}{5}t - \frac{14}{25})\cos t\ .$$

Ici il n'y a pas de conditions initiales, on ne peut donc pas calculer les constantes k_1 et k_2.