

Leçon 05 – Correction des "Avez-vous compris ?"

.....

Avez-vous compris ? 2: Soit l'équation caractéristique: $(r+1)^4(r-2)^2(r^2+4r+8) = 0$.

1) Résoudre cette équation.

2) Donner l'équation homogène (2) associée à cette équation caractéristique.

3) Résoudre (2).

Solution

1) Cette équation a pour solutions : $r_1 = -1$ (d'ordre de multiplicité 4), $r_2 = 2$ (d'ordre de multiplicité 2) et r_3 et r_4 , deux racines complexes conjuguées racines de $r^2 + 4r + 8 = 0$. Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta = -16 = (4i)^2$ et $r_3 = -2 + 2i$, $r_4 = -2 - 2i$.

2) En développant, l'équation caractéristique s'écrit :

$r^8 + 4r^7 + 2r^6 + 28r^5 - 55r^4 + 16r^3 + 124r^2 + 11r + 32 = 0$. L'équation homogène associée à cette équation caractéristique est

(2) $\varphi^{(8)}(t) + 4\varphi^{(7)}(t) + 2\varphi^{(6)}(t) + 28\varphi^{(5)}(t) - 55\varphi^{(4)}(t) + 16\varphi^{(3)}(t) + 124\varphi''(t) + 11\varphi'(t) + 32\varphi(t) = 0$.

3) D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme :

$$k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t} + k_3 t^2 e^{-t} + k_4 t^3 e^{-t} + k_5 e^{2t} + k_6 e^{-2t} + e^{-2t}(k_7 \cos 2t + k_8 \sin 2t).$$

Les 4 premiers termes correspondent à r_1 , les 2 suivants à r_2 et le dernier à r_3 et r_4 .

Les k_i ($i=1, \dots, 8$) sont des constantes que l'on peut déterminer à l'aide des conditions initiales.