Leçon 05 - Cours : Équations différentielles

Objectif : Les modèles dynamiques en économie théorique sont souvent formulés à l'aide d'équations différentielles correspondant au concept de l'évolution du temps en continu. Alors que si le temps est considéré sous une forme séquentielle, on fait appel à la notion de suites récurrentes.

Dans cette leçon nous n'étudierons que les équations différentielles linéaires à coefficients constants car ce sont celles qui sont le plus souvent rencontrées en économie.

Ici la variable est le temps t et les équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre n sont de la forme :

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}\, x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0\, x(t) = f(t),$$

où $x^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de x par rapport au temps t, les a_i sont des réels donnés et f(t) est une fonction de **R** dans **R** donnée.

Il y a bien sûr beaucoup d'analogie entre les résolutions des systèmes récurrents linéaire d'ordre 1 abordés dans la leçon précédente et celles des systèmes différentiels que nous étudions dans cette leçon. Il est bien sûr important de remarquer les ressemblances des deux démarches mais aussi et surtout les différences.

Dans cette leçon nous considérons donc les équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre n, la variable étant le temps t, de la forme :

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}\, x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0\, x(t) = f(t) \quad (E),$$

où $x^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de x par rapport au temps t, les a_i sont des réels donnés et f(t) est une fonction de **R** dans **R** donnée.
Résoudre (E) revient à trouver toutes les fonctions x(t) de **R** dans **R** (en économie le problème posé est réel et attend des solutions réelles), vérifiant l'équation (E).

On note parfois au lieu de x'(t) et au lieu de x"(t) lorsque la variable par rapport laquelle on dérive est le temps.

1. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

1.1. L'ordre 1

On considère donc les équations de la forme : (1) $x'(t) + ax(t) = f(t)$ où $a\in\mathbf{R}$ et f est une fonction donnée. f(t) est appelé **second membre**.

On appelle **équation homogène** (ou **équation sans second membre**) associée à (1) l'équation :

$$\varphi'(t)+ a\varphi(t) = 0 \quad (2).$$

On retiendra :

La solution générale x(t) de l'équation (1) est la somme d'une solution particulière de (1) x*(t) et de la solution générale de l'équation (2) homogène associée, φ(t) :

$$x(t) = \varphi(t) + x^*(t).$$

1.1.1. Solution de l'équation homogène (ou sans second membre)

Résolvons donc : $\varphi'(t)+ a\varphi(t) = 0$. Soit $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -a$ et $\ln|\varphi(t)| = -at + C$

D'où $|\varphi(t)| = e^{-at+C}$. Et

$$\varphi(t) = ke^{-at} \quad k\in\mathbf{R}.$$

1.1.2. Méthodes de détermination de la solution particulière

1) Une solution particulière apparaît de façon évidente si on observe bien l'équation de départ. C'est le cas de 3) dans « Exercez-vous1 ».

2) Dans le cas particulier qui nous intéresse des équations différentielles à coefficients constants, on cherchera la solution particulière $x^*(t)$ de la même forme que le second membre $f(t)$. Plus précisément :

- Si f est un polynôme de degré n et a non nul, on posera $x^*(t) = Q(t)$, polynôme de degré n et on déterminera les coefficients de Q en écrivant que $x^*(t)$ est solution de l'équation différentielle (1). Si a est nul Q est de degré n+1.

- Si $f(t) = P(t)e^{mt}$, on posera $x^*(t) = Q(t)e^{mt}$, avec Q de même degré que P si $m \neq -a$. Si $m = -a$, il y a résonance et on posera $x^*(t) = tQ(t)e^{mt}$.

- Si $f(t) = (\lambda \sin mt + \mu \cos mt)P(t)$, on posera $x^*(t) = Q(t)\sin mt + R(t)\cos mt$, avec Q et R, polynômes de même degré que P.

1.2. L'ordre 2.

On considère les équations de la forme : $x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = f(t)$ (1).

Remarquons là encore que si $x^*(t)$ est une solution particulière de (1), $x(t) - x^*(t)$ est solution de l'équation sans second membre (ou homogène) associée :

$$\varphi''(t) + a\,\varphi'(t) + b\,\varphi(t) = 0 \quad (2).$$

On retiendra donc :

> La solution générale de l'équation (1) est la somme d'une solution particulière de (1) et de la solution générale de l'équation homogène (2) associée : $x(t) = \varphi(t) + x^*(t)$.

1.2.1. Résolution de l'équation homogène (ou sans second membre) (2)

Si **φ_1 et φ_2** sont deux **solutions particulières de (2) indépendantes** (c'est à dire non proportionnelles) alors pour tous réels k_1 et k_2, $k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2$ est encore une solution de (2). On admettra et on retiendra le résultat général suivant :

> Toutes les solutions de (2) sont de la forme $\varphi = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2$.
> Cela revient à dire que l'ensemble des solutions de (2) forment **un espace vectoriel de dimension 2** engendré par φ_1 et φ_2.

Considérons les solutions de (2) de la forme e^{rt}. On a donc $r^2e^{rt} + are^{rt} + be^{rt} = 0$ et r vérifie :

> $$r^2 + ar + b = 0 \qquad (3).$$
>
> Cette équation est appelée **équation caractéristique** associée à (1) (ou à (2))

- **1^er^ cas** : $\Delta > 0$. (3) a donc 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2. $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$ sont donc deux solutions particulières indépendantes et les autres solutions sont de la forme :

$$\varphi(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} .$$

- **2ème cas** : $\Delta < 0$. (3) a donc 2 solutions complexes conjuguées r et .

Si $r = \alpha + i\beta$, dans $\mathbf{C}$ (2) admet alors des solutions de la forme :
$\lambda_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} + \lambda_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} [(\lambda_1 + \lambda_2)\cos\beta t + i(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\beta t]$. En choisissant λ_1 et λ_2 conjugués et en posant : $k_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbf{R}$ et $k_2 = i(\lambda_1 - \lambda_2) \in \mathbf{R}$,
on obtient les solutions réelles de la forme :

$$\varphi(t) = e^{\alpha t}(k_1 \cos\beta t + k_2 \sin\beta t).$$

- **3ème cas** : $\Delta = 0$. (3) a donc une racine double r_0. $e^{r_0 t}$ est une solution particulière et on vérifie alors que $te^{r_0 t}$ est une autre solution particulière. Ainsi l'ensemble des solutions de (2) est le la forme :

$$\varphi(t) = (k_1 + tk_2)e^{r_0 t} .$$

Remarque : On notera l'analogie avec les suites récurrentes d'ordre 2. Mais on remarquera bien les différences.

1.2.2. Résolution de l'équation (1) avec second membre "simple"

Nous avons vu que les solutions de (1) sont de la forme :
$x(t) = \varphi(t) + x^*(t)$ avec $\varphi(t)$ solution de (2) et $x^*(t)$ solution particulière de (1). Donnons la forme de la solution particulière lorsque f(t) est une fonction simple.

Idée : Chercher une solution particulière de la même forme que le second membre (coefficients différents).

- **1^er^ cas** : f(t) est un polynôme de degré n.

Alors une solution particulière de (1) est :
*Un polynôme de degré n si b est non nul.
*Un polynôme de degré n+1 si b est nul et si a ne l'est pas.
*Un polynôme de degré n+2 si a et b sont nuls.

- **2ème cas** : $f(t) = P(t)e^{mt}$, avec m réel et P(t) polynôme de degré n.

Alors une solution particulière de (2) est de la forme
* $x^*(t) = Q(t)e^{mt}$ avec Q(t) polynôme de degré n, si m n'est pas racine de (3).
* $x^*(t) = tQ(t)e^{mt}$ si m est une racine simple de (3).
* $x^*(t) = t^2Q(t)e^{mt}$ si m est une racine double de (3).

- **3ème cas** : $f(t) = (\lambda\cos mt + \mu\sin mt)P(t)$ $(m \in \mathbf{R}^*)$

Une solution particulière est de la forme : x^*t)sinmt où Q et R sont des polynômes de même?(t) = Q(t)cosmt + R(degré que P.

- **4ème cas** : $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ avec $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de formes analogues à celles du 1er, 2ème ou du 3ème cas. Alors si $x^*_1(t)$ est une solution particulière de

$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f_1(t)$ et si $x^*_2(t)$ est une solution particulière de
$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f_2(t)$, $x^*_1(t) + x^*_2(t)$ est une solution particulière de (3).

1.3 L'ordre n

On considère donc l'équation différentielle (1) suivante :
$x^{(n)}(t)+ a_{n-1}\, x^{(n-1)}(t)+ \ldots + a_0\, x(t) = f(t)$ avec $a_i \in \mathbf{R}$ (pour $i=0,\ldots,n$) et a_0 *non nul*.
Ici x et f sont des fonctions de t. $x^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de x par rapport à t. On ne note pas la variable lorsque ce n'est pas nécessaire pour simplifier l'écriture.

On montre comme à l'ordre 1 que la solution générale de (1) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre associée, appelée parfois équation homogène et ici notée (2) (conformément au paragraphe précédent) :
$\varphi^{(n)} + a_{n-1}\, \varphi^{(n-1)} + \ldots + a_0\, \varphi = 0$ (2):

$$x(t) = \varphi(t) + x^*(t).$$

On admettra le résultat suivant, déjà rencontré à l'ordre 2 :

> Les solutions de l'équation homogène associée forment un sous espace vectoriel de dimension n de l'espace des fonctions de **R** dans **R**.

Il faut donc déterminer n **fonctions indépendantes** vérifiant (2). Cherchons-les sous la forme e^{rt}. On a donc $e^{rt}(r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_0) = 0$.
Ainsi r est racine du **polynôme caractéristique**, $P(r) = r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} + \ldots + a_0$ (3). Ce polynôme est de degré n et admet n racines r_j (distinctes ou non) dans **C**.

Si ces racines sont distinctes, les fonctions $e^{r_j t}$ sont indépendantes et la solution générale de l'équation homogène (2) est de la forme $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} k_j e^{r_j t}$.

Remarquons que si P(r) est à coefficients réels et si $r_j = \alpha + i\beta$ ne l'est pas, est aussi solution de P(r) et les solutions réelles associées sont de la forme $e^{\alpha t}(k_j \cos\beta t + k'_j \sin\beta t)$ (démonstration faite dans le cas de l'ordre 2).

D'autre part si r_j est une racine de P(r) d'ordre de multiplicité m_j , de façon analogue à l'ordre 2, les m_j solutions indépendantes liées à r_j sont de la forme : $t^{\ell} e^{r_j t}$ (avec $\ell = 0,1,\ldots,m_j-1$) et les solutions de (2) peuvent s'écrire :

$$\varphi(t) = \sum_j \sum_{\ell=0}^{m_j-1} k_{j\ell}\, t^{\ell} e^{r_j t} \quad (k_{j\ell} \in \mathbf{R})$$

Cette écriture est un peu compliquée mais pour couvrir le cas général il est difficile de faire plus simple. Les nombreux exercices permettent de comprendre la méthode qui somme toute est simple.

En fait la difficulté réside donc dans la recherche des racines de P(r).

Quant à la solution particulière elle se détermine de façon analogue à ce qui a été vu précédemment dans le cas où le second membre f(t) est soit un polynôme, soit le produit d'une fonction exponentielle et d'un polynôme, soit la somme de telles fonctions.

2. Systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre 1

Tout système d'équations différentielles d'ordre 1 s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}\, x_1(t) + a_{12}\, x_2(t) + \ldots + a_{1n}\, x_n(t) \\ . \\ . \\ x'_n(t) = a_{n1}\, x_1(t) + a_{n2}\, x_2(t) + \ldots + a_{nn}\, x_n(t) \end{cases},$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \quad (1),$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ ($x_1,\ldots,x_n$ fonctions de t *inconnues*),

$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ ($f_1, f_2,\ldots,f_n$ fonctions de t *données*) et $A = (a_{ij})$ matrice d'ordre n à coefficients réels constants.

Comme dans le paragraphe précédent, si $X^*(t)$ est une solution particulière de (1) alors $X(t) = X^*(t) + Y(t)$ avec Y(t) solution du système d'équations homogènes associé :

$$Y'(t) = AY(t).$$

Mais ici il est très rare de trouver facilement une solution particulière, aussi on utilisera plutôt la méthode suivante.

2.1 Résolution du système avec second membre

Si $A = PJP^{-1}$, avec J réduite de Jordan de A (éventuellement diagonale), l'équation $X'(t) = AX(t) + F(t)$ s'écrit $X'(t) = PJP^{-1}X(t) + F(t)$ et $P^{-1}X'(t) = J(P^{-1}X(t)) + P^{-1}F(t)$.

Donc si on pose $Z(t) = P^{-1}X(t)$, on obtient,

$$Z'(t) = JZ(t) + P^{-1} F(t).$$

Or si les $f_i(t)$, coordonnées de F(t) sont des sommes de produits de fonctions polynômes et de fonctions exponentielles, celles de $P^{-1} F(t)$ le sont aussi puisque ce sont des combinaisons linéaires des $f_i(t)$.

Et si J est diagonale, on est ramené à résoudre n équations différentielles du premier ordre à coefficients constants avec second membre. Si J n'est pas diagonale, on procède de même de proche en proche en commençant par la dernière équation.

Remarque :

*Si $F(t) = 0$, le calcul de P^{-1} est inutile. Ce calcul ne sert qu'au calcul de $P^{-1}F$.

*Si A est diagonalisable, $Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}F(t)$. Soient $z_i(t)$ est la $i^{ème}$ coordonnée de Z(t), $g_i(t)$ celle de $P^{-1}F(t)$ et λ_i les valeurs propres de A , on a :
$z'?_i(t) = \lambda_i z_i(t) + g_i(t)$ (i) et $z_i(t) = k_i e^{\lambda it} + z^*_i(t)$ ($k_i \in R$ et $z^*_i(t)$ solution particulière de (i)).

Donc, puisque $X(t) = PZ(t)$ et si P a pour vecteurs colonnes les V_i (vecteur propre associé à λ_i) , X(t) s'écrit : $X(t) = \sum_{i=1}^{n} (k_i e^{\lambda_i t} + z^*_i(t)) V_i$. (I)

Cette formule s'applique bien sûr au cas complexe. Mais dans le cas où le problème posé est réel et où certaines valeurs propres sont complexes, on regroupera les valeurs propres conjuguées de façon à faire apparaître un résultat réel. Ce résultat fera bien sûr apparaître des sinus et des cosinus. La démarche est analogue à celle qui a été utilisée pour les systèmes d'équations récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

*Si A n'est **pas diagonalisable**, $Z'(t) = JZ(t) + P^{-1}F(t)$. Etant donné la simplicité de la matrice J, on peut résoudre facilement cette équation. Le cas général utilise des notations assez lourdes aussi on se contentera d'un exemple. Mais on remarquera que, dans ce cadre, il y a toujours au moins un cas de **résonance**.

2.2. Condition initiale

Si le système est de dimension n (n équations différentielles), la solution de
(1) $X'(t) = AX(t) + F(t)$, dépend de n constantes (k_1, k_2, k_3 dans le dernier exemple).

Si la condition initiale X(0) est donnée, on peut alors déterminer ces constantes.

2.3. Comportement à l'infini

Nous allons introduire la notion d'équilibre et de stabilité et constater que celles-ci sont liées au signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice A.

2.3.1. Cas d'un système d'équations différentielles linéaires homogène

Soit $Y'(t) = AY(t)$, où A est une matrice réelle à coefficients constants. Etant donnée la forme des solutions que nous avons obtenues au paragraphe précédent (c.f. (I) et (II)), le comportement de $Y(t)$ quand t tend vers l'infini dépend des valeurs propres λ_j (en effet "l'exponentielle l'emporte sur toute fonction polynôme") lorsque la variable tend vers l'infini.

0r si $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t} e^{i\beta_j t}$.

Or $e^{i\beta_j t}$ est borné puisque de module 1.

Donc si $\forall j?\ \alpha_j < 0$ $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\lambda_j t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} Y(t) = \mathbf{0}$ (matrice colonne nulle).

Dans le cas contraire, c'est à dire si pour un j $\alpha_j > 0$, $\|Y(t)\| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ (sauf si la condition initiale conduit au cas particulier où les coefficients des $e^{\lambda_j t}$ sont nuls). Il y a alors divergence.

Équilibre et stabilité :

Par définition, un équilibre est une solution constante Y_e du système donné :

$$\forall t? \in \mathbf{R},\ Y(t) = Y_e\ .$$

$$Y_e \text{ vérifie donc } AY_e = \mathbf{0} \text{ et } \boxed{Y_e \in \mathrm{Ker}A}\ .$$

Dorénavant nous considèrerons que rangA = n, soit $\mathrm{Ker}A = \{\mathbf{0}\}$. Le seul équilibre est donc $Y_e = \mathbf{0}$.

Donc si **toutes les parties réelles des valeurs propres sont strictement négatives**, à l'infini $Y(t)$ tend vers l'équilibre **0**. On dit alors que l'équilibre $Y_e = \mathbf{0}$ est stable dans $\mathbf{R}^n$ et A est dite **différentiellement stable**.

2.3.2. Système d'équations différentielles linéaires avec second membre

Soit $X'(t) = AX(t) + F(t)$. On sait que $X(t) = X^*(t) + Y(t)$, où $X^*(t)$ est une solution particulière et $Y(t)$ la solution générale du système homogène associé.

Si A est différentiellement stable, $Y(t)$ tend vers zéro quant t tend vers $+\infty$ et $X(t) \to X^*(t)$, solution "tendancielle" ou "d'équilibre".

Mais ici cet équilibre n'est pas constant, en effet à priori $X^*(t)$ dépend de t. Donc quel que soit $X(0)$, $X(t)$ tend vers $X^*(t)$ et $Y(t)$ représente les écarts de $X(t)$ à la solution tendancielle $X^*(t)$ quand $t \to +\infty$.

Si A n'est pas *différentiellement stable*, Y(t) ne converge pas et en général (sauf pour des conditions initiales particulières) X(t) diverge.

Critères de stabilité

Nous allons donner quelques critères pour déterminer si une matrice est différentiellement stable.

*Une matrice carrée d'ordre 2 est différentiellement stable si et seulement si sa trace est négative et son déterminant positif. (En effet la trace est la somme des valeurs propres et le déterminant est leur produit).

*Une matrice carrée d'ordre 3 est différentiellement stable si son polynôme caractéristique $-\lambda^3 + trA\lambda^2 + b\lambda + détA = 0$ est? tel que :
$trA < 0$, $b < 0$ et $détA < 0$ et $btrA > -détA$ (cette condition n'est pas nécessaire).

*Une matrice A d'ordre n :
Soit son polynôme caractéristique: $(-1)^n(\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n) = 0$

Une *condition nécessaire* pour que A soit d-stable est que tous les b_i soient positifs.

Une *condition suffisante* pour que A soit d-stable est que A soit à diagonale négative dominante c'est à dire que les termes de la diagonale soient tous négatifs et que leur valeur absolue soit supérieure à la somme des valeurs absolues des termes de la ligne (ou de la colonne) correspondante autres que celui se trouvant sur la diagonale.

Exercices

Exercice 1-Résoudre les équations différentielles suivantes où t est la variable :

1) $x'(t) - x(t) + 1 + t = 0$ 2) $x'(t) - 2x(t) - 2t^3 - t = 0$ et $x(0) = 1$

3) $x'(t) - 3x(t) = 2e^{3t}$ et $x(1) = 4e^3$ 4) $3x'(t) - 2x(t) - 3\cos 2t = 0$ et $x(0) = \frac{17}{20}$

5) $x(t) + x'(t) = 2te^{-t}$ et $x(0) = 1$

Exercice 2 - Résoudre les équations différentielles suivantes où t est la variable :

1) $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = e^{-t}\cos 2t$ et $x'(0) = -2$ et $x(0) = 1$

2) $4x''(t) + 4x'(t) + x(t) = 0$ 3) $x''(t) + 4x(t) = 0$

4) $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2t - \sin t$ 5) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = e^t$

6) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) - e^t(1-2t) = 0$

7) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) - te^{2t} = 0$ et $x(0) = 1$ et $x'(0) = 4$.

Exercice 3 - Résoudre les équations différentielles suivantes où t est la variable :

1) $x^{(3)}(t) - 2x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0$ et $x(0) = 5$ et $x'(0) = 3$ et $x''(0) = 0$

2) $x^{(3)}(t) - 2x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 2t^2$ et $x(0) = \frac{5}{2}$ et $x'(0) = 2$ et $x''(0) = 0$

3) $x^{(3)}(t) - x''(t) + x'(t) - x(t) = 2e^t$ et $x(0)=1$ et $x'(0)=0$ et $x''(0)=1$

Exercice 4 - On donne le résultat suivant : si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible alors $P^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2 \\ y'(t) = x(t) + y(t) - 2t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2e^{2t} \\ y'(t) = -x(t) + y(t) + 2t + 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x'_1(t) = -x_1(t) - 2x_3(t) \\ x'_2(t) = -x_2(t) + 4x_3(t) \\ x'_3(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) - x_2(t) + 4x_3 \\ x'_2(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x'_3(t) = 2x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$

Exercice 5 - On considère l'équation : $x''(t) = -2x'(t) + bx(t)$ (b est un paramètre réel non nul). Etudier la stabilité des solutions.

Exercice 6 - Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles d-stables ?

Exercice 7 - Pour quelles valeurs de a la matrice $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle d-stable?

Exercice 8 - Résoudre $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + 2\sin t + e^{-t} \\ y'(t) = -5x(t) + 4y(t) - \frac{1}{2} z(t) + 3\sin t + 2e^{-t} + t \\ z'(t) = -7x(t) + 5y(t) - \frac{1}{2} z(t) + \sin t + 2e^{-t} + 2t \\ x(0) = -\frac{1}{6} \ , y(0) = 1 \ , z(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$.

(On pourra utiliser des résultats obtenus dans les exercices 14 et 16 du chapitre précédent)?

Exercice 9 - Résoudre **astucieusement** $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + t + 2e^{t} \\ y'(t) = -x(t) + y(t) - t - e^{t} \\ z'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ x(0) = -2 \ , y(0) = 2 \ , z(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

(On pourra utiliser les résultats de l'exercice **10** du chapitre précédent)

N.B. : On donne le résultat suivant : si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible alors $P^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 10 - 1) Réduire $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en choisissant pour une matrice de passage ayant pour dernière ligne (1 1).

2) - Résoudre **astucieusement** $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2^{e3t} + 1 \\ y'(t) = x(t) - 4y(t) + 4z(t) + 4t + 7 - e^{3t} \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) + 2t + 4 - 2^{e3t} \\ x(0) = 1 \ , y(0) = 3 \ , z(0) = 2 \end{cases}$

N.B. : On donne le résultat suivant : si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible alors

$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$