L3 économie appliquée
Aunège
Université Paris-sud
0dile Brandière

Correction des exercices de la leçon 4 : Réduction d'une matrice

1. 1) Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $PQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   On en déduit par exemple que $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$ ou que $Q^{-1} = \frac{1}{3}P$.

   2)$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (2-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$

   $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(4-\lambda)$.

   A a donc deux valeurs propres distinctes, $\lambda_1 = 1$ avec $m(\lambda_1) = 2$ et $\lambda_2 = 4$ avec $m(\lambda_2) = 1$. ($m(\lambda)$ désigne comme dans le cours l'ordre de multiplicité de λ).

   Détermination du sous-espace propre $E_{\lambda_1} = 1$ associé à λ_1

   $\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_1 V\}$, soit

   $\begin{cases} 2x + y + z = x \\ x + 2y + z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases}$, ou $x + y + z = 0$ et

   $\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. E_{λ_1} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

   $$E_{\lambda_1} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > .$$

   D'autre part V_1 et V_2 sont libres (car non proportionnels), ils forment donc une base de E_{λ_1} et $\dim E_{\lambda_1} = 2 = m(\lambda_1)$. A est donc diagnalisable.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} associé à $\lambda_2 = 4$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}$, soit

$\begin{cases} 2x + y + z = 4x \\ x + 2y + z = 4y \\ x + y + 2z = 4z \end{cases}$, ou $\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_2} est donc engendré par $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$E_{\lambda_2} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

On en déduit alors que

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après 1) $P^{-1} = \frac{1}{3}Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (2+4^n) & (-1+4^n) & (-1+4^n) \\ (-1+4^n) & (3+4^n) & (-1+4^n) \\ (-1+4^n) & (-1+4^n) & (2+4^n) \end{pmatrix}.$$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit f l'application linéaire de matrice B dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   D'après B, $f(e_2) = 3e_2$ et $f(e_1) = e_1 + e_3 = f(e_3)$. Donc $f(e_1 + e_3) = 2(e_1 + e_3)$ et $f(e_1 - e_3) = 0 = 0(e_1 - e_3)$.

   On en déduit que e_2 est un vecteur propre de f associé a la valeur propre 3, $e_1 + e_2$ est un vecteur proprte de f associé à la valeur propre 2 et $e_1 - e_3$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0. Ainsi B a trois valeurs propres distinctes et B est diagonalisable.

Ici on a même montré que $B = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. 1) Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $P^{-1} = Q$.

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (-4-\lambda) & -6 & 0 \\ 3 & (5-\lambda) & 0 \\ 3 & 6 & (5-\lambda) \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} (-4-\lambda) & -6 \\ 3 & (5-\lambda) \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda)$.

A a donc trois valeurs propres distinctes qui sont, par ordre croissant, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 5$, et A est diagonalisable.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_1} associé à λ_1 = -1

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_1 V\}$, soit

$\left\{\begin{array}{l} -4x - 6y = -x \\ 3x + 5y = -y \\ 3x + 6y + 5z = -z \end{array}\right.$, ou $\left\{\begin{array}{l} -3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 3x + 6y + 6z = 0 \end{array}\right.$, ou $\left\{\begin{array}{l} x = -2y \\ z = 0 \end{array}\right.$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_1} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on a choisi $y = -1$ pour retrouver la première colonne de P) ,

$$E_{\lambda_1} = < \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} > .$$

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} associé à $\lambda_2 = 2$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}$, soit

$\left\{\begin{array}{l} -4x - 6y = 2x \\ 3x + 5y = 2y \\ 3x + 6y + 5z = 2z \end{array}\right.$, ou $\left\{\begin{array}{l} -6x - 6y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 3x + 6y + 3z = 0 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} y = -x \\ z = x \end{array}\right.$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_2} est donc engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$E_{\lambda_2} =< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Détermination du sous-espace propre E_{λ_3} associé à $\lambda_3 = 5$

D'après la forme de A, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_3 = 5$ puisque $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et

$$E_{\lambda_3} =< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Donc

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et $P^{-1} = Q$ est donné par 1).

3) $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} (2(-1)^n - 2^n) & (2(-1)^n - 2^{n+1}) & 0 \\ ((-1)^{n+1} + 2^n) & ((-1)^n + 2^{n+1}) & 0 \\ (-2^n + 5^n) & (-2^{n+1} + 2 \times 5^n) & 5^n \end{pmatrix}.$$

4)On constate que le système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc en itérant que

$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \\ w_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat

$$\begin{cases} u_n = (2(-1)^n - 2^n)u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})v_0 \\ v_n = ((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + ((-1)^n + 2^{n+1})v_0 \\ w_n = (-2^n + 5^n)u_0 + (-2^{n+1} + 2 \times 5^n)v_0 + 5^n w_0 \end{cases}$$

Si $u_0 \neq 0$ ou $v_0 \neq 0$, les trois suites divergent (pour u_n et v_n ce sont les puissances de 2 qui l'emportent, pour w_n si $w_0 \neq 0$, c'est 5^n).

Si $u_0 = v_0 = 0$ et si $w_0 \neq 0$, pour tout n, $u_n = v_n = 0$ et (w_n) diverge.

Si $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, pour tout n, $u_n = v_n = w_n = 0$.

4. Si $A^2 = A$, A est la matrice d'un projecteur p, projection sur $\Im mp$ parallèlement à $\ker p$ et $\Im mp \bigoplus \ker p = \mathbb{R}^n$.

   Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une base $\mathcal{B}_1$ de $\Im mp$ et $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$, une base $\mathcal{B}_2$ de $\ker p$. Pour tout vecteur v_i de $\mathcal{B}_1$, $p(v_i) = v_i$ puisque $v_i \in \Im mp$ et tout vecteur v_i de $\mathcal{B}_2$, $p(v_i) = 0$ puisque $v_i \in \ker p$. Donc la matrice de p dans dans la base $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ est

   $$\begin{array}{c} \overbrace{\qquad\textit{r colonnes}\qquad} \\ \begin{pmatrix} 1 & . & . & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \text{ Et } A \text{ est diagonalisable.}$$

   Remarquons que si $A^2 = I_n$, $A = A^{-1}$.

   Si $AV \neq -V$, $AV + V \neq 0$ et $A(AV + V) = A^2V + AV = V + AV$.

   Donc $AV + V$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$.

   Si pour tout V, $AV = -V$, $A = -I_n$ et est diagonale.

   Si $AV \neq V$, $V - AV \neq 0$ et $A(V - AV) = AV - A^2V = AV - V = -(V - AV)$.

   Donc $V - AV$ est un vecteur propre associé à $\lambda_2 = -1$

   Si pour tout V, $AV = V$, $A = I_n$ et est diagonale.

   Soit E_1 le sous-espace propre associé à λ_1 et E_2 le sous-espace propre associé à λ_2. On peut écrire
   $$\forall V \in \mathbb{R}^n \quad V = \frac{1}{2}(AV + V) + \frac{1}{2}(V - AV).$$

   Or $V_1 = \frac{1}{2}(AV + V) \in E_1$ et $V_2 = \frac{1}{2}(V - AV) \in E_2$. Donc $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^n$ et puisque E_1 et E_2 sont des sous-espaces propres, cette somme est directe, $E_1 \bigoplus E_2 = \mathbb{R}^n$. Donc A est diagonalisable.

   Remarque : Cet exercice est difficile. Il s'adresse aux plus curieux. Il est intéressant d'en comprendre le corrigé.

5. $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ a & (4-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 - a = (\lambda - 3)^2 - (a + 1)$.

   - Si $a \neq -1$, $P_A(\lambda)$ a deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$ et A est diagonalisable.

• Si $a = -1$ $P_A(\lambda)$ a une racine double, $\lambda = 3$.

Si A était diagonalisable, on aurait $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} = 3PI_2P^{-1} = 3I_2$. Or $A \neq 3I_2$ donc A n'est pas digonalisable.

• Etudions le cas où $a \neq -1$ et déterminons P et D telles que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2.

Si $a+1 > 0$, $\lambda_1 = 3 + \sqrt{a+1}$ et $\lambda_2 = 3 - \sqrt{a+1}$.

si $a+1 < 0$, $\lambda_1 = 3 + i\sqrt{-a-1}$ et $\lambda_2 = 3 - i\sqrt{-a-1}$.

On peut donc écrire les valeurs propres de A sous la forme $\lambda = 3 + \varepsilon\sqrt{|a+1|}$, avec $\varepsilon = 1, -1, i, -i$ selon les 4 cas précédents. Désignons par E_λ le sous-espace propre associé à $\lambda = 3 + \varepsilon\sqrt{|a+1|}$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda V\}$, soit

$\begin{cases} 2x + y = (3 + \varepsilon\sqrt{|a+1|})x \\ ax + 4y = (3 + \varepsilon\sqrt{|a+1|})y \end{cases}$, ou $\{\ y = (1 + \varepsilon\sqrt{|a+1|})x$ et

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ (1 + \varepsilon\sqrt{|a+1|})x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ (1 + \varepsilon\sqrt{|a+1|}) \end{pmatrix}\}$.

E_λ est donc engendré par $V = \begin{pmatrix} 1 \\ (1 + \varepsilon\sqrt{|a+1|}) \end{pmatrix}$,

$$E_\lambda =< \begin{pmatrix} 1 \\ (1 + \varepsilon\sqrt{|a+1|}) \end{pmatrix} > .$$

Or si $a+1 > 0$, $|a+1| = a+1$ et les valeurs propres correspondent à $\varepsilon = 1$ et -1. On obtient alors $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{a+1} & 0 \\ 0 & 3 - \sqrt{a+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + \sqrt{a+1} & 1 - \sqrt{a+1} \end{pmatrix}.$$

Si $a+1 < 0$, $|a+1| = -a-1$ et les valeurs propres correspondent à $\varepsilon = i$ et -i. On obtient alors $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{-a-1} & 0 \\ 0 & 3 - i\sqrt{-a-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + i\sqrt{-a-1} & 1 - i\sqrt{-a-1} \end{pmatrix}.$$

6. $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 & 0 \\ -1 & (3-\lambda) & 1 \\ 1 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$

   $P_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$.

   On se retrouve ici dans la même situation que dans l'exercice précédent (cas $a = -1$), il n'y a qu'une seule valeur propre dont l'ordre de multiplicité est la dimension de l'espace vectoriel dans lequel on travaille, ici 3.

Si A était diagonalisable, on aurait $A = PDP^{-1}$ avec $D = 2I_3$. Or $2I_3$ commute avec P donc $A = 2I_2PP^{-1} = 2I_2$. Or $A \neq 2I_3$, donc A n'est pas digonalisable.

Remarque : On vérifie aisément que $E_2 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$ et $\dim E_2 = 1 < m(2)$.

7. $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$

   $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3$.

   Avec un raisonnement analogue à celui de l'exercice précédent, on en déduit que A n'est pas diagonalisable.

   Détermination du sous-espace propre E_λ associé à $\lambda = 1$

   $\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda V\}$, soit

   $\begin{cases} y = x \\ z = y \\ x - 3y + 3z = z \end{cases}$, ou $x = y = z$

   $\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

   E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$E_\lambda =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

   $\dim E_\lambda = 1$ donc la réduite de Jordan de A est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   et A a deux vecteurs de Jordan V_2 et V_3.

   D'après J, V_2 vérifie $AV_2 = V_1 + V_2$ et si $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{cases} y = 1 + x \\ z = 1 + y \\ x - 3y + 3z = 1 + z \end{cases}$.

   $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

D'après J, V_3 vérifie $AV_3 = V_2 + V_3$ et si $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\left\{ \begin{array}{l} y = -1 + x \\ z = 0 + y \\ x - 3y + 3z = 1 + z \end{array} \right.$.

$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. Et $A = PJP^{-1}$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. C'est la matrice de l'exercice **6**. On a vu que $P_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3$ et que A n'est pas diagonalisable.

   Détermination du sous-espace propre E_λ associé à $\lambda = 2$

   $\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda V\}$, soit

   $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2x \\ -x + 3y + z = 2y \\ x + z = 2z \end{array} \right.$, ou $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = z \end{array} \right.$

   $\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

   E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $$E_\lambda = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

   $\dim E_\lambda = 1$ donc la réduite de Jordan de A est

   $$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   et A a deux vecteurs de Jordan V_2 et V_3.

   D'après J, V_2 vérifie $AV_2 = V_1 + 2V_2$ et si $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 + 2x \\ -x + 3y + z = 0 + 2y \\ x + z = 1 + z \end{array} \right.$.

   $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

D'après J, V_3 vérifie $AV_3 = V_2 + 2V_3$ et si $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 2x + y = 1 + 2x \\ -x + 3y + z = 1 + 2y \\ x + z = 0 + z \end{cases}$.

$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. Et $A = PJP^{-1}$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (a-\lambda) & b & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & -1 \\ 0 & 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = (a-\lambda) \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix}$

$P_A(\lambda) = (a-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (a-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

• Si $a \neq 2$ et $a \neq 3$, A a trois valeurs propres distinctes et A est diagonalisable.

• Si $a = 2$, A a une valeur propre double $\lambda = 2$.

Détermination du sous-espace propre E_λ associé à $\lambda = 2$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda V\}$, soit

$\begin{cases} 2x + by = 2x \\ y - z = 2y \\ 2y + 4z = 2z \end{cases}$, ou $\begin{cases} by = 0 \\ y = -z \end{cases}$

• si $a = 2$ et $b \neq 0$,

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$E_\lambda =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > .$$

$\dim E_\lambda = 1 < m(\lambda)$. A n'est pas digonalisable. Une forme réduite de Jordan de A est

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

• si $a = 2$ et $b = 0$, $\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$E_\lambda =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > .$$

V_1 et V_2 sont libres (car non proportionnels), ils forment une base de E_λ et $\dim E_\lambda = 2 = m(\lambda)$. A est alors diagonalisable et A est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

• si $a = 3$, A a une valeur propre double $\lambda = 3$. Et par un raisonnement analogue au précédent, on montre que si $a = 3$ et $b \neq 0$, A n'est pas diagonalisable et a une réduite de Jordan de la forme $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On montre aussi que si $a = 3$ et $b = 0$, A est diagonalisable et semblable à $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t.$$

Réduction de A

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2.$$

Détermination du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre $\lambda = 2$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2\} \Longleftrightarrow \{AV = 2V\}$, soit $\begin{cases} 3x + y = 2x \\ -x + y = 2y \end{cases}$ ou $y = -x$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

E_2 est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_2 =< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} > .$

$\dim E_2 = 1 < m(2)$, donc A n'est pas diagonalisable et a pour réduite de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Reste à déterminer un vecteur de Jordan.
$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur de Jordan$\} \iff \{AV = V_1 + 2V\}$, soit $\begin{cases} 3x + y = 1 + 2x \\ -x + y = -1 + 2y \end{cases}$
ou $y = 1 - x$. Et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. Donc $A = PJP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Changement de variable

Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PJP^{-1})X_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = J(P^{-1}X_t) \quad (1)$.
Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,
(1) devient $Z_{t+1} = JZ_t \quad (2)$.
Notons $Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$, (2) s'écrit $\begin{cases} u_{t+1} = 2u_t + v_t \\ v_{t+1} = 2v_t \end{cases}$, soit $\begin{cases} v_t = k_1 2^t \\ u_{t+1} = 2u_t + k_1 2^t \quad (3) \end{cases}$

Résolution de (3) :

$u_{t+1} = k_2 2^t + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (3) de la forme $u_t^* = Ct2^t$. On détermine C en écrivant que u_t^* vérifie (3) :

$C(t+1)2^{t+1} = 2Ct2^t + k_1 2^t$, soit $2^t(2C - k_1) = 0$, $C = \frac{k_1}{2}$ et $u_t = k_2 2^t + \frac{k_1}{2} t 2^t$. Donc

$Z_t = \begin{pmatrix} k_2 2^t + \frac{k_1}{2} t 2^t \\ k_1 2^t \end{pmatrix}$ et $X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 2^t + \frac{k_1}{2} t 2^t \\ k_1 2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)2^t + \frac{k_1}{2} t 2^t \\ -k_2 2^t - \frac{k_1}{2} t 2^t \end{pmatrix}$.
D'où

$$\begin{cases} x_t = (k_1 + k_2)2^t + \frac{k_1}{2} t 2^t \\ y_t = -k_2 2^t - \frac{k_1}{2} t 2^t \end{cases}$$

Les constantes k_1 et k_2 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

11. Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t.$$

On a donc $X_t = A^t X_0$. Mais ce calcul, après réduction de A utilise P^{-1}. Nous allons plutôt utiliser, comme dans l'exercice précédent un changement de variable.

Réduction de A

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 & -2 \\ 2 & (1-\lambda) & -2 \\ 2 & 2 & (-3-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = (1-\lambda)(1+\lambda)^2.$$

A a donc 2 valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1$ avec $m(\lambda_1) = 1$ et $\lambda_2 = -1$ avec $m(\lambda_2) = 2$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} associé à la valeur propre $\lambda_2 = -1$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}$, soit $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 2z = -x \\ 2x + y - 2z = -y \\ 2x + 2y - 3z = -z \end{array}\right.$ ou $x + y - z = 0$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_2} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{\lambda_2} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$.

$\dim E_{\lambda_2} = 2 = m(\lambda_2)$, donc A est diagonalisable et est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Détermination du sous-espace propre E_{λ_1} associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_1 V\}$, soit $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 2z = x \\ 2x + y - 2z = y \\ 2x + 2y - 3z = z \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} y = z \\ x = z \end{array}\right.$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

E_{λ_1} est donc engendré par $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{\lambda_1} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$.

Donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Changement de variable

Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PDP^{-1})X_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = D(P^{-1}X_t)$ (1).
Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,
(1) devient $Z_{t+1} = DZ_t$ (2).
Notons $Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$, (2) s'écrit $\left\{\begin{array}{l} u_{t+1} = -u_t \\ v_{t+1} = -v_t \\ w_{t+1} = w_t \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{l} u_t = k_1(-1)^t \\ v_t = k_2(-1)^t \\ w_t = k_3 \end{array}\right.$

$Z_t = \begin{pmatrix} k_1(-1)^t \\ k_2(-1)^t \\ k_3 \end{pmatrix}$ et $X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(-1)^t \\ k_2(-1)^t \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(-1)^t + k_3 \\ k_2(-1)^t + k_3 \\ (k_1+k_2)(-1)^t + k_3 \end{pmatrix}$.
D'où

$$\begin{cases} x_t = k_1(-1)^t + k_3 \\ y_t = k_2(-1)^t + k_3 \\ z_t = (k_1+k_2)(-1)^t + k_3 \end{cases}$$

Les constantes k_1, k_2 et k_3 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

12. Ecrivons le système sous la forme (1) $\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t - y_t - 2z_t + 2 \\ y_{t+1} = x_t + y_t - 1 \\ z_{t+1} = -\frac{1}{2}y_t + \frac{3}{2} \end{cases}$

Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $F_t = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t + F_t.$$

Réduction de A

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 & -2 \\ 1 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3.$
A a donc 1 valeur propre $\lambda = 1$ avec $m(\lambda) = 3$.

Détermination du sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda V\}$, soit $\begin{cases} 2x - y - 2z = x \\ x + y = y \\ -\frac{1}{2}y = z \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x = 0 \\ -y = 2z \end{cases}$.
$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (on choisit $z = -1$ pour pouvoir utiliser la remarque en fin d'énoncé), $E_\lambda =< \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} >$.

$\dim E_\lambda = 1 < m(\lambda)$, donc A n'est pas diagonalisable et a pour réduite de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Détermination des vecteurs de Jordan.

A a deux vecteurs de Jordan V_2 et V_3 vérifiant $AV_2 = V_1 + V_2$ et $AV_3 = V_2 + V_3$.

Donc si $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AV_2 = V_1 + V_2$ équivaut à $\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 + x \\ x + y = 2 + y \\ -\frac{1}{2}y = -1 + z \end{cases}$, soit $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x = 2 \\ y = 2 - 2z \end{cases}$

et $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

Si $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AV_3 = V_2 + V_3$ équivaut à $\begin{cases} 2x - y - 2z = 2 + x \\ x + y = 0 + y \\ -\frac{1}{2}y = 1 + z \end{cases}$, soit $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ x = 0 \\ y = -2 - 2z \end{cases}$

et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

Donc $A = PJP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Le calcul de P^{-1} donne $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ d'après la remarque de l'énoncé.

Changement de variable

Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PJP^{-1})X_t + F_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = J(P^{-1}X_t) + P^{-1}F_t$ (2).

Or $P^{-1}F_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,

(1) devient $Z_{t+1} = JZ_t + P^{-1}F_t$ (3).

Notons $Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$, (3) s'écrit $\begin{cases} u_{t+1} = u_t + v_t - \frac{1}{2} & (4) \\ v_{t+1} = v_t + w_t + 1 & (5) \\ w_{t+1} = w_t & (6) \end{cases}$. On résout ce système en commençant par la dernière équation.

$$(6) \Longleftrightarrow \{w_t = k_1\}$$

(5) s'écrit $v_{t+1} = v_t + k_1 + 1$ (7)

Donc $v_t = k_2 + v_t^*$ avec v_t^* solution particulière de (7) de la forme $v_t^* = Ct$ (il y a résonance).
On détermine C en écrivant que v_t^* vérifie (7) :

$C(t+1) = Ct + k_1 + 1$, soit $C = k_1 + 1$ et

$$v_t = k_2 + (k_1 + 1)t.$$

(4) s'écrit $u_{t+1} = u_t + k_2 + (k_1 + 1)t - \frac{1}{2}$ (8)
Donc $u_t = k_3 + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (8) de la forme $u_t^* = (C_1 t + C_2)t = C_1 t^2 + C_2 t$ (il y a résonance). On détermine C_1 et C_2 en écrivant que u_t^* vérifie (8) :

$C_1(t+1)^2 + C_2(t+1) = C_1 t^2 + C_2 t + k_2 + (k_1+1)t - \frac{1}{2}$, soit $t(2C_1 - k_1 - 1) + (C_1 + C_2 - k_2 + \frac{1}{2}) = 0$ et $C_1 = \frac{1}{2}(k_1 + 1)$ et $C_2 = -\frac{1}{2}k_1 + k_2 - 1$. Donc

$$u_t = k_3 + \frac{1}{2}(k_1 + 1)t^2 + (-\frac{1}{2}k_1 + k_2 - 1)t.$$

D'où
$Z_t = \begin{pmatrix} k_3 + \frac{1}{2}(k_1+1)t^2 + (-\frac{1}{2}k_1 + k_2 - 1)t \\ k_2 + (k_1+1)t \\ k_1 \end{pmatrix}$ et
$X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_3 + \frac{1}{2}(k_1+1)t^2 + (-\frac{1}{2}k_1 + k_2 - 1)t \\ k_2 + (k_1+1)t \\ k_1 \end{pmatrix}$ D'où

$$\begin{cases} x_t = 2k_2 + 2(k_1+1)t \\ y_t = 2k_3 + (2k_2 - k_1 - 2)t + (k_1+1)t^2 \\ z_t = (-k_3 + k_2 - k_1) + (\frac{3}{2}k_1 - k_2 + 2)t - \frac{1}{2}(k_1+1)t^2 \end{cases}$$

Les constantes k_1, k_2 et k_3 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

13. Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t.$$

La stabilité d'un système séquentiel dépend du module des valeurs propres de A.

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (a-\lambda) & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & (a-\lambda) \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = (a - \frac{1}{2} - \lambda)(a + \frac{1}{2} - \lambda).$

Les deux valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = a - \frac{1}{2}$ et $\lambda_2 = a + \frac{1}{2}$.

Et A sera séquentiellement stable si et seulement si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$.

Soit $|a - \frac{1}{2}| < 1$ et $|a + \frac{1}{2}| < 1$. 0r

$$\{|a - \frac{1}{2}| < 1\} \Longleftrightarrow \{-\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}\}$$

et

$$\{|a+\frac{1}{2}|<1\} \Longleftrightarrow \{-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}\},$$

soit

$$|a|<\frac{3}{2}.$$

14. 1)$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 1 & 0 \\ -5 & (4-\lambda) & -\frac{1}{2} \\ -7 & 5 & (-\frac{1}{2}-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3+\frac{5}{2}\lambda^2-2\lambda+\frac{1}{2}.$

$P_A(\lambda) == (1-\lambda)^2(\frac{1}{2}-\lambda)$.

Les deux valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$ avec $m(\lambda_1) = 2$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ avec $m(\lambda_2) = 1$.

A sera diagonalisable si le sous-espace propre E_{λ_1} associé à $\lambda_1 = 1$ est de dimension 2 ($= m(\lambda_1)$).

Détermination du sous-espace propre E_{λ_1}.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_1 V\}$, soit $\begin{cases} -x+y=x \\ -5x+4y-\frac{1}{2}z=y \\ -7x+5y-\frac{1}{2}z=z \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=2x \\ z=2x \end{cases}$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_1} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\dim E_{\lambda_1} = 1 < m(\lambda_1)$, donc A n'est pas diagonalisable et est semblable à

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2) $S = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Pour déterminer P, il faut déterminer un vecteur de Jordan V_2 associé à λ_1 et le sous-espace propre E_{λ_2} associé à λ_2.

Détermination de V_2

V_2 vérifie $AV_2 = V_1 + V_2$.

Si $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AV_2 = V_1 + V_2$ équivaut à $\left\{ \begin{array}{l} -x + y = 1 + x \\ -5x + 4y - \frac{1}{2}z = 2 + y \\ -7x + 5y - \frac{1}{2}z = 2 + z \end{array} \right.$, soit $\left\{ \begin{array}{l} y = 1 + 2x \\ z = 2 + 2x \end{array} \right.$

et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2}.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}$, soit $\left\{ \begin{array}{l} -x + y = \frac{1}{2}x \\ -5x + 4y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}y \\ -7x + 5y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3}{2}x \\ z = \frac{1}{2}x \end{array} \right.$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_2} est donc engendré par $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Etant donnée la réduction de A, on a $X_{t+1} = (PSP^{-1})X_t$ (1) et $P^{-1}X_{t+1} = S(P^{-1}X_t)$.

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,

(1) devient $Z_{t+1} = SZ_t$ (2).

Notons $Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$, (2) s'écrit $\left\{ \begin{array}{ll} u_{t+1} = u_t + v_t & (3) \\ v_{t+1} = v_t & (4) \\ w_{t+1} = \frac{1}{2}w_t & (5) \end{array} \right.$. On résout ce système en commençant par la dernière équation.

$$(5) \Longleftrightarrow \{w_t = k_1(\frac{1}{2})^t\}$$

$$(4) \iff \{v_t = k_2\}$$

(3) s'écrit $u_{t+1} = u_t + k_2 \quad (6)$

Donc $u_t = k_3 + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (6) de la forme $u_t^* = Ct$ (il y a résonance). On détermine C en écrivant que u_t^* vérifie (6) :

$C(t+1) = Ct + k_2$, soit $C = k_2$ et

$$u_t = k_3 + k_2 t.$$

D'où

$$Z_t = \begin{pmatrix} k_3 + k_2 t \\ k_2 \\ k_1(\frac{1}{2})^t \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_3 + k_2 t \\ k_2 \\ k_1(\frac{1}{2})^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3 + k_2 t + 2k_1(\frac{1}{2})^t \\ 2(k_3 + k_2 t) + k_2 + 3(k_1(\frac{1}{2})^t) \\ 2(k_3 + k_2 t) + 2k_2 + k_1(\frac{1}{2})^t \end{pmatrix}$$

On détermine k_1, k_2 et k_3 à l'aide des conditions initiales $X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{cases} 5 = k_3 + 2k_1 \\ 8 = 2k_3 + k_2 + 3k_1 \\ 4 = 2k_3 + 2k_2 + k_1 \end{cases}$ et $k_1 = 2$, $k_2 = 0$ et $k_3 = 1$. Donc

$$\begin{cases} x_t = 1 + 4(\frac{1}{2})^t \\ y_t = 2 + 6(\frac{1}{2})^t \\ z_t = 2 + 2(\frac{1}{2})^t \end{cases}$$

Et

$$\lim_{t \to +\infty} (x_t, y_t, z_t) = (1, 2, 2).$$

15. Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$, , $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $F_t = \begin{pmatrix} 2t - 2 + (-1)^t \\ 6t + 5(4^t) \\ 6t - 2 + (-1)^t + 5(4^t) \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t + F_t \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Réduction de A

D'après l'exercice **11**,

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : ici on a changé l'ordre des valeurs propres et des vecteurs propres pour pouvoir utiliser l'indication de l'énoncé.

Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PDP^{-1})X_t + F_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = D(P^{-1}X_t) + P^{-1}F_t \quad (1)$.

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,

(1) devient $Z_{t+1} = DZ_t + P^{-1}F_t \quad (2)$.

D'autre part, si on suit les indications de l'énoncé :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$P^{-1}F_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t - 2 + (-1)^t \\ 6t + 5(4^t) \\ 6t - 2 + (-1)^t + 5(4^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2 + (-1)^t \\ 4t + 5(4^t) \end{pmatrix}$$

Notons $Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$, (2) s'écrit $\begin{cases} u_{t+1} = u_t + 2t & (3) \\ v_{t+1} = -v_t - 2 + (-1)^t & (4) \\ w_{t+1} = -w_t + 4t + 5(4^t) & (5) \end{cases}$.

Résolution de (3)

$u_t = k_1 + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (3) de la forme $u_t^* = C_1t^2 + C_2t$ (il y a résonance). On détermine C_1 et C_2 en écrivant que u_t^* vérifie (3) :

$C_1(t+1)^2 + C_2(t+1) = C_1t^2 + C_2t + 2t$, soit $t(2C_1 - 2) + C_1 + C_2 = 0$. D'où $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, et

$$u_t = k_1 + t^2 - t.$$

Résolution de (4)

$v_t = k_2(-1)^t + v_t^*$ avec v_t^* solution particulière de (4) de la forme $v_t^* = C_1 + C_2t(-1)^t$ (il y a résonance). On détermine C_1 et C_2 en écrivant que v_t^* vérifie (4) :

$C_1 + C_2(t+1)(-1)^{t+1} = -(C_1 + C_2t(-1)^t) - 2 + (-1)^t$, soit $(2C_1+2) + (-1)^t(-C_2 - 1) = 0$. D'où $C_1 = -1$, $C_2 = -1$, et

$$v_t = k_2(-1)^t - 1 - t(-1)^t.$$

Résolution de (5)

$w_t = k_3(-1)^t + w_t^*$ avec w_t^* solution particulière de (5) de la forme $w_t^* = C_1 t + C_2 + C_3(4^t)$.
On détermine C_1, C_2 et C_3 en écrivant que w_t^* vérifie (5) :

$C_1(t+1) + C_2 + C_3(4^{t+1}) = -(C_1 t + C_2 + C_3(4^t)) + 5(4^t) + 4t$ soit
$t(2C_1 - 4) + (C_1 + 2C_2) + 4^t(5C_3 - 5) = 0$. D'où $C_1 = 2$, $C_2 = -1$,$C_3 = 1$ et

$$w_t = k_3(-1)^t + 2t - 1 + 4^t.$$

$$Z_t = \begin{pmatrix} k_1 + t^2 - t \\ k_2(-1)^t - 1 - t(-1)^t \\ k_3(-1)^t + 2t - 1 + 4^t \end{pmatrix} \text{ et } X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 + t^2 - t \\ k_2(-1)^t - 1 - t(-1)^t \\ k_3(-1)^t + 2t - 1 + 4^t \end{pmatrix}$$

$$X_t = \begin{pmatrix} k_1 + k_2(-1)^t + t^2 - t - 1 - t(-1)^t \\ k_1 + k_3(-1)^t + t^2 + t - 1 + 4^t \\ k_1 + (k_3 + k_2)(-1)^t + t^2 + t - 2 - t(-1)^t + 4^t \end{pmatrix}.$$

On détermine les constantes k_1, k_2 et k_3 en utilisant les conditions initiales $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{cases} 0 = k_1 + k_2 - 1 \\ 0 = k_1 + k_3 - 1 + 1 \\ -1 = k_1 + (k_3 + k_2) - 2 + 1 \end{cases}$ et $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ et $k_3 = -1$. D'où

$$\begin{cases} x_t = t^2 - t - t(-1)^t \\ y_t = -(-1)^t + t^2 + t + 4^t \\ z_t = -(t+1)(-1)^t + t^2 + t - 1 + 4^t \end{cases}$$

16. Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -7 & 5 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $F_t = \begin{pmatrix} 2t^2 - 12 + 2^t \\ 3t^2 - 16 + 2^{t+1} \\ t^2 - 2 + 2^{t+1} \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t + F_t \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Réduction de A

D'après l'exercice **14**,

$$A = PJP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PJP^{-1})X_t + F_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = J(P^{-1}X_t) + P^{-1}F_t \quad (1).$

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,
(1) devient $Z_{t+1} = JZ_t + P^{-1}F_t \quad (2)$.
D'autre part, si on suit les indications de l'énoncé :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -11 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$P^{-1}F_t = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t^2 - 12 + 2^t \\ 3t^2 - 16 + 2^{t+1} \\ t^2 - 2 + 2^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^t \\ 2 \\ t^2 - 6 \end{pmatrix}$$

Notons $Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$, (2) s'écrit $\begin{cases} u_{t+1} = u_t + v_t + 2^t \quad (3) \\ v_{t+1} = v_t + 2 \quad (4) \\ w_{t+1} = \frac{1}{2}w_t + t^2 - 6 \quad (5) \end{cases}$.

On résout ce système en commençant par la dernière équation.

Résolution de (5)

$w_t = k_1(\frac{1}{2})^t + w_t^*$ avec w_t^* solution particulière de (5) de la forme $w_t^* = C_1t^2 + C_2t + C_3$.
On détermine C_1, C_2 et C_3 en écrivant que w_t^* vérifie (5) :

$C_1(t+1)^2 + C_2(t+1) + C_3 = \frac{1}{2}(C_1t^2 + C_2t + C_3) + t^2 - 6$ soit
$t^2(\frac{1}{2}C_1 - 1) + t(2C_1 + \frac{1}{2}C_2) + (C_1 + C_2 + \frac{1}{2}C_3 + 6) = 0$. D'où $C_1 = 2$, $C_2 = -8$,$C_3 = 0$ et

$$w_t = k_1(\frac{1}{2})^t + 2t^2 - 8t.$$

Résolution de (4)

$v_t = k_2 + v_t^*$ avec v_t^* solution particulière de (4) de la forme $v_t^* = C_1t$ (il y a résonance).
On détermine C_1 en écrivant que v_t^* vérifie (4) :

$C_1(t+1) = C_1t + 2$, soit $C_1 = 2$ et

$$v_t = k_2 + 2t.$$

Résolution de (3)

(3) devient (6) $u_{t+1} = u_t + k_2 + 2t + 2^t$.

$u_t = k_3 + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (6) de la forme $u_t^* = C_1t^2 + C_2t + C_32^t$ (il y a résonance). On détermine C_1 e,t C_2 et C_3 en écrivant que u_t^* vérifie (6) :

$C_1(t+1)^2+C_2(t+1)+C_3 2^{t+1} = C_1t^2+C_2t+C_3 2^t+k_2+2t+2^t$, soit $t(2C_1-2)+(C_1+C_2-k_2)+2^t(2C_3-C_3-1)=0$. D'où $C_1=1$, $C_2=k_2-1$ et $C_3=1$, et

$$u_t = k_3+t^2+(k_2-1)t+2^t.$$

D'où

$$Z_t = \begin{pmatrix} k_3+t^2+(k_2-1)t+2^t \\ k_2+2t \\ k_1(\frac{1}{2})^t+2t^2-8t \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_3+t^2+(k_2-1)t+2^t \\ k_2+2t \\ k_1(\frac{1}{2})^t+2t^2-8t \end{pmatrix},$$

$$X_t = \begin{pmatrix} k_3+5t^2+(k_2-17)t+2^t+2k_1(\frac{1}{2})^t \\ 2k_3+8t^2+(2k_2-24)t+2^{t+1}+k_2+3k_1(\frac{1}{2})^t \\ 2k_3+4t^2+(2k_2-6)t+2^{t+1}+2k_2+k_1(\frac{1}{2})^t \end{pmatrix}$$

On détermine k_1, k_2 et k_3 à l'aide des conditions initiales $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{cases} 2 = k_3+1+2k_1 \\ 4 = 2k_3+2+k_2+3k_1 \\ 3 = 2k_3+2+2k_2+k_1 \end{cases}$ et $k_1=1$, $k_2=1$ et $k_3=-1$. Donc

$$\begin{cases} x_t = 5t^2-16t-1+2^t+(\frac{1}{2})^{t-1} \\ y_t = 8t^2-22t-1+2^{t+1}+3(\frac{1}{2})^t \\ z_t = 4t^2-4t+2^{t+1}+(\frac{1}{2})^t \end{cases}$$

17. **Réduction de** A

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (\frac{5}{2}-\lambda) & -1 \\ 4 & (-\frac{3}{2}-\lambda) \end{vmatrix} = (\tfrac{1}{2}-\lambda)^2.$$

Détermination du sous-espace propre $E_{\frac{1}{2}}$ associé à la valeur propre $\lambda = \frac{1}{2}$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}}\} \Longleftrightarrow \{AV = \frac{1}{2}V\}$, soit $\begin{cases} \frac{5}{2}x-y = \frac{1}{2}x \\ 4x-\frac{3}{2}y = \frac{1}{2}y \end{cases}$ ou $y=2x$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

$E_{\frac{1}{2}}$ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_{\frac{1}{2}} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$.

$\dim E_{\frac{1}{2}} = 1 < m(\frac{1}{2})$, donc A n'est pas diagonalisable et a pour réduite de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Reste à déterminer un vecteur de Jordan.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur de Jordan$\} \Longleftrightarrow \{AV = V_1 + \frac{1}{2}V\}$, soit $\begin{cases} \frac{5}{2}x - y = 1 + \frac{1}{2}x \\ 4x - \frac{3}{2}y = 2 + \frac{1}{2}y \end{cases}$

ou $2x = 1 + y$. Et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient. Donc $A = PJP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Si on considère les deux premières équations du système on a (1) $\begin{cases} x_{t+1} = \frac{5}{2}x_t - y_t - 2 + 3(2^t) \\ y_{t+1} = 4x_t - \frac{3}{2}y_t - 5 + 6(2^t) \end{cases}$

Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ et $F_t = \begin{pmatrix} -2 + 3(2^t) \\ -5 + 6(2^t) \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t + F_t \quad \text{avec} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PJP^{-1})X_t + F_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = J(P^{-1}X_t) + P^{-1}F_t$

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,

(1) devient $Z_{t+1} = JZ_t + P^{-1}F_t \quad (2)$.

D'après la formule de l'énoncé $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et

$P^{-1}F_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 + 3(2^t) \\ -5 + 6(2^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3(2^t) \\ 1 \end{pmatrix}$

Notons $Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$, (2) s'écrit $\begin{cases} u_{t+1} = \frac{1}{2}u_t + v_t + -2 + 3(2^t) \quad (3) \\ v_{t+1} = \frac{1}{2}v_t + 1 \quad (4) \end{cases}$,

Résolution de (4) :

$v_{t+1} == k_1(\frac{1}{2})^t + v_t^*$ avec v_t^* solution particulière de (4) de la forme $v_t^* = C$. On détermine C en écrivant que v_t^* vérifie (4) :

$C = \frac{1}{2}C + 1$, soit $C = 2$ et

$$v_t = k_1(\frac{1}{2})^t + 2.$$

Résolution de (3) :

(3) s'écrit (5) : $u_{t+1} = \frac{1}{2}u_t + k_1(\frac{1}{2})^t + 3(2^t)$

$u_{t+1} == k_1(\frac{1}{2})^t + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (5) de la forme $u_t^* = C_1t(\frac{1}{2})^t + C_2(2^t)$. On détermine C_1 et C_2 en écrivant que u_t^* vérifie (5) :

$C_1(t+1)(\frac{1}{2})^{t+1} + C_2(2^{t+1}) = \frac{1}{2}(C_1 t(\frac{1}{2})^t + C_2(2^t)) + k_1(\frac{1}{2})^t + 3(2^t)$, soit $(\frac{1}{2})^t(\frac{1}{2}C_1 - k_1) + 2^t(2C_2 - \frac{1}{2}C_2 - 3) = 0$. D'où $C_1 = 2k_1$, $C_2 = 2$ et

$$u_t = k_2(\frac{1}{2})^t + 2k_1 t(\frac{1}{2})^t + 2^{t+1}$$

.

Donc $Z_t = \begin{pmatrix} k_2(\frac{1}{2})^t + 2k_1 t(\frac{1}{2})^t + 2^{t+1} \\ k_1(\frac{1}{2})^t + 2 \end{pmatrix}$ et

$$X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2(\frac{1}{2})^t + 2k_1 t(\frac{1}{2})^t + 2^{t+1} \\ k_1(\frac{1}{2})^t + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_2 + 2k_1 t)(\frac{1}{2})^t + 2^{t+1} \\ (2k_2 - k_1 + 4k_1 t)(\frac{1}{2})^t + 2^{t+2} - 2 \end{pmatrix}.$$

On détermine k_1 et k_2 à l'aide des conditions initiales $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où $\begin{cases} 2 = k_2 + 2 \\ 1 = 2k_2 - k_1 + 2 \end{cases}$, d'où $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$ et

$$\begin{cases} x_t = 2t(\frac{1}{2})^t + 2^{t+1} \\ y_t = (4t-1)(\frac{1}{2})^t + 2^{t+2} - 2 \end{cases}$$

D'autre part z_t vérifie alors $z_t = -\frac{1}{2} z_t$ et $z_t = k_3(-\frac{1}{2})^t$. Et puisque $z_0 = 1$, $k_3 = 1$ et

$$z_t = (-\frac{1}{2})^t$$

En récapitulant :

$$\begin{cases} x_t = 2t(\frac{1}{2})^t + 2^{t+1} \\ y_t = (4t-1)(\frac{1}{2})^t + 2^{t+2} - 2 \\ z_t = (-\frac{1}{2})^t \end{cases}$$