Leçon 04 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 9 : Résoudre dans R : (I) $\begin{cases} x_{t+1} = 4x_t + 4y_t \\ y_{t+1} = -x_t \\ x_0 = -4 \text{ et } y_0 = 5 \end{cases}$.

Solution

Le système **(I)** est un système homogène (ou sans second membre).

Si on pose $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ et $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ l'écriture matricielle de **(I)** est

$$X_{t+1} = \mathbf{A}X_t.$$

- **Réduction de A**

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. **A** a donc une valeur propre double $\lambda_1 = 2$.

Remarquons que **A** n'est certainement pas diagonalisable car si **A** l'était on aurait **A** $=\mathbf{P(2I_2)P^{-1}} = \mathbf{2I_2}$ ce qui est faux (c.f. la **remarque utile** de l'"Exercez-vous **7**").

Sous-espace propre E_2 associé à $\lambda_1 = 2$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé a λ_1 si et seulement si $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, soit

$\begin{cases} 4x + 4y = 2x \\ -x = 2y \end{cases}$. D'où $x = -2y$ et $v = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. E_2 est donc un sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on retrouve que **A** n'est pas diagonalisable. **A** est semblable à $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vecteur de Jordan associé

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur Jordan associé à P_1 et **A** si et seulement $\mathbf{A}v = P_1 + 2v$, c'est-à-dire

$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\begin{cases} 4x + 4y = -2 + 2x \\ -x = 1 + 2y \end{cases}$. $x = -1$ et $y = 0$ conviennent.

$P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur de Jordan associé à P_1.

D'où $\mathbf{A} = \mathbf{PJP^{-1}}$ avec $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Ecriture matricielle simplifiée de (I)**

(I) s'écrit $X_{t+1} = \mathbf{PJP^{-1}}X_t$ ou $(\mathbf{P^{-1}}X_{t+1}) = \mathbf{J}(\mathbf{P^{-1}}X_t)$.

- **Changement de variable**

Posons $Z_t = \mathbf{P}^{-1}X_t$ (ou $X_t = \mathbf{P}Z_t$), **(I)** s'écrit alors

$$(\mathbf{II}) \qquad Z_{t+1} = \mathbf{J}Z_t$$

- **Résolution de (II)**

Notons $\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$ les coordonnées de Z_t. **(II)** équivaut à $\begin{cases} u_{t+1} = 2u_t + v_t & (1) \\ v_{t+1} = 2v_t & (2) \end{cases}$. On résout ce système en commençant par le bas.

Résolution de (2)

$$\boxed{v_t = k_1 2^t}$$

k_1 est une constante qui sera déterminée à la fin à l'aide des conditions initiales.

Résolution de (1) : $u_{t+1} = 2u_t + k_1 2^t$ ($k_1 2^t$ est le second membre).

$u_t = k_2 2^t + u^*(t)$ où k_2 est une constante qui sera déterminée à l'aide des conditions initiales et u^* est une solution particulière de (1) de la forme $u^*(t) = Ct2^t$ (il y a **résonnance**). On détermine C en écrivant que $u^*(t)$ est solution de (1) :

$C(t+1)2^{t+1} = 2\,Ct2^t + k_1 2^t$ soit $2^t(2C - k_1) = 0$ et $C = \frac{1}{2}k_1$. $u^*(t) = \frac{1}{2}k_1 t2^t$ et

$$\boxed{u_t = k_2 2^t + \frac{1}{2}k_1 t2^t}$$

D'où $Z_t = \begin{pmatrix} k_2 2^t + \frac{1}{2}k_1 t2^t \\ k_1 2^t \end{pmatrix}$.

- **Calcul de X_t**

$$X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_2 2^t + \frac{1}{2}k_1 t2^t \\ k_1 2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^t(-2k_2 - k_1 t - k_1) \\ 2^t(k_2 + \frac{1}{2}k_1 t) \end{pmatrix}.$$

- **Calcul des constantes à l'aide des conditions initiales**

Pour t= 0 $X_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, d'où $\begin{cases} -4 = -2k_2 - k_1 \\ 5 = k_2 \end{cases}$ et $k_1 = -6$ et $k_2 = 5$. D'où le résultat

$$\boxed{\begin{cases} x_t = 2^t(-4 + 6t) \\ y_t = 2^t(5 - 3t) \end{cases}}$$