Leçon 04 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 8 : Déterminer la forme réduite de Jordan **J** semblable à la matrice
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution

Remarque : 2 est évidemment valeur propre et un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de **A** est :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & -1 \\ 0 & 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = (2 - \lambda)\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = (2 - \lambda)\,((1-\lambda)(4-\lambda) + 2)$$

$P_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda)$.

Donc **A** admet 2 pour valeur propre double et 3 comme valeur propre simple.

$P_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda = 2$ si et seulement si $\begin{cases} 2x+y = 2x \\ y-z = 2y \\ 2y+4z = 2z \end{cases}$

ce qui équivaut à $y = z = 0$ et le sous espace propre relatif à $\lambda = 2$ est de dimension 1 et

engendré par $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple. $E_2 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$.

$\dim E_2 = 1$ et $m(2) = 2$, **A** n'est donc pas diagonalisable.

Mais **A** est semblable à la matrice $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (forme réduite de Jordan de **A**).

Il faut déterminer un vecteur de Jordan P_2 tel que $AP_2 = P_1+2P_2$ et si $P_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

on a : $\begin{cases} 2x+y = 1+2x \\ y-z = 0+2y \\ 2y+4z = 0+2z \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 1 \\ y = -z \end{cases}$ donc $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

$P_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda = 3$ si et seulement si $\begin{cases} 2x+y = 3x \\ y-z = 3y \\ 2y+4z = 3z \end{cases}$, soit $\begin{cases} x=y \\ 2y+z = 0 \end{cases}$ et $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ convient.

Donc $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$ avec $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(à vérifier par le calcul après avoir montré que $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$)