Leçon 04 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 7 : Soit $\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Ces matrices sont-elles diagonalisables ?
2. Déterminer tous les sous-espaces propres de ces matrices (on en donnera une base).
3. Pour chaque matrice diagonalisable, on précisera la matrice diagonale qui lui est semblable et la matrice de passage associée en précisant la formule qui lie les matrices calculées.

Solution

1.

- $P_{A1}(\lambda) = \begin{vmatrix} (-2-\lambda) & -2 & 1 \\ -2 & (1-\lambda) & -2 \\ 1 & -2 & (-2-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27 = (3 - \lambda)(\lambda + 3)^2.$

Donc d'après le cours $\mathbf{A_1}$ est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre E_{-3} associé à la valeur propre $\lambda_1 = -3$ est de dimension 2 (= ordre de multiplicité de λ_1).

Détermination de E_{-3} sous-espace propre associé à $\lambda_1 = -3$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3}$ si et seulement si $\mathbf{A_1}v = \lambda_1 v$ soit $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou

$\begin{cases} -2x - 2y + z = -3x \\ -2x + y - 2z = -3y \\ x - 2y - 2z = -3z \end{cases}$ ou $x - 2y + z = 0$. Donc $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y-x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On en déduit alors que E_{-3} est un sous-espace vectoriel de dimension 2 engendré par (1,0,-1) et (0,1,2). Ces deux sont vecteurs libres (car non proportionnels) et forment une base de E_{-3} et dim $E_{-3} = 2 = m(-3)$.

$\mathbf{A_1}$ est donc diagonalisable.

- $P_{A2}(\lambda) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 \\ -3 & (-1-\lambda) & -1 \\ 3 & 1 & (-3-\lambda) \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (2 - \lambda)(\lambda + 2)^2.$

Donc d'après le cours $\mathbf{A_2}$ est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre E_{-2} associé à la valeur propre $\lambda_1 = -2$ est de dimension 2 (= ordre de multiplicité de λ_1).

Détermination de E_{-2} sous-espace propre associé à $\lambda_1 = -2$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}$ si et seulement si $\mathbf{A_2}v = \lambda_1 v$ soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou

$$\begin{cases} 2x = -2x \\ -3x - y - z = -2y \\ 3x + y - 3z = -2z \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \text{. Donc } v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\text{. On en déduit alors que}$$

E_{-2} est un sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par (0,1,1).
dim $E_{-2} = 1 < m(-2)$ et $\mathbf{A_2}$ n'est donc pas diagonalisable.

- $$P_{A3}(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & (2-\lambda) & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1 - \lambda)^3.$$

Donc d'après le cours $\mathbf{A_3}$ est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est de dimension 3 (= ordre de multiplicité de λ_1).

Remarque qui peut être utile (vous pouvez l'utiliser dans les exercices à venir) :
Dans ce cas (et ce à chaque fois que l'ordre de multiplicité d'une valeur propre est égal à la dimension de l'espace vectoriel) si $\mathbf{A_3}$ était diagonalisable on aurait $\mathbf{A_3 = PDP^{-1}}$ avec $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I_3}$ et $\mathbf{A_3 = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3}$. C'est faux car $\mathbf{A_3 \neq I_3}$, $\mathbf{A_3}$ n'st donc pas diagonalisable. (si la valeur propre était égale à λ, $\mathbf{D} = \lambda\mathbf{I_3}$ et on obtiendrait et $\mathbf{A_3} = \lambda\mathbf{I_3}$ ce qui amène à la même conclusion). Vérifions-le en déterminant $\mathbf{E_1}$.

Détermination de E_1 sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \text{ si et seulement si } \mathbf{A_3}v = \lambda_1 v \text{ soit } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} x = x \\ x + 2y - z = y \\ x + y = z \end{cases} \text{ ou } x + y - z = 0\text{. Donc } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\text{. On en déduit alors}$$

que E_1 est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (< m(1)) engendré par (1,0,1) et (0,1,1) (vecteurs libres car non proportionnels). $\mathbf{A_3}$ n'est donc pas diagonalisable.

2.

- Pour $\mathbf{A_1}$ reste à déterminer le sous-espace propre $\mathbf{E_3}$ associé à la valeur propre

$\lambda_2 = 3$.

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \text{ si et seulement si } \mathbf{A_1}v = \lambda_2 v \text{ soit } \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y + z = 3x \\ -2x + y - 2z = 3y \\ x - 2y - 2z = 3z \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \text{. Donc } v = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\text{. On en déduit alors que } E_3 \text{ est}$$

un sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par (1,2,1).

- Pour $\mathbf{A_2}$ reste à déterminer le sous-espace propre $\mathbf{E_2}$ associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$.

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$ si et seulement si $\mathbf{A_2}v = \lambda_2 v$ soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou

$\begin{cases} 2x = 2x \\ -3x - y - z = 2y \\ 3x + y - 3z = 2z \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -3z \\ x = \frac{8}{3} z \end{cases}$. Donc $v = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} z \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$. On en déduit alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par (8,-9,3).

3. Pour $\mathbf{A_1}$ d'après les résultats précédents :

$\mathbf{A_1 = PD_1P^{-1}}$ avec $\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Attention à l'ordre des vecteurs propres, étant donnée la matrice $\mathbf{D_1}$ choisie les deux premières colonnes de **P** sont les coordonnées de deux vecteurs propres indépendants associés à -3 et la dernière correspond à un vecteur propre associé à 3.