# *Leçon 04 – Correction des "Exercez-vous"*

**Exercez-vous 6 :** Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application f dans la base canonique **b**.
Réduire **A** (c'est-à-dire, déterminer les valeurs propres de **A**, puis ses sous-espaces propres et enfin, si c'est possible la matrice diagonale semblable à **A** ainsi que la matrice de passage **P** de **b** vers la base des vecteurs propres).

**Solution**

On a déjà vu que $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)\lambda$ ("Exercez-vous **4"**) et que **A** a 3 valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$.

- **Sous-espace propre $E_2$ associé à $\lambda_1 = 2$**

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$ si et seulement si $\mathbf{A}v = \lambda_1 v$ soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou

$\begin{cases} 2x + 4z = 2x \\ 3x - 4y + 12z = 2y \\ x - 2y + 5z = 2z \end{cases}$ ou $\begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases}$. Donc $v = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit alors que $E_2$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par (2,1,0).

- **Sous-espace propre $E_1$ associé à $\lambda_2 = 1$**

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$ si et seulement si $\mathbf{A}v = \lambda_2 v$ soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou

$\begin{cases} 2x + 4z = x \\ 3x - 4y + 12z = y \\ x - 2y + 5z = z \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -4z \\ y = 0 \end{cases}$. Donc $v = \begin{pmatrix} -4z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit alors que $E_1$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par (-4,0,1).

- **Sous-espace propre $E_0$ associé à $\lambda_3 = 0$**

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0$ si et seulement si $\mathbf{A}v = \lambda_3 v = \mathbf{0}$ soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou

$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2z \\ 2y = 3z \end{cases}$. Donc $v = \begin{pmatrix} -2z \\ \frac{3}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. On en déduit alors que $E_0$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par (-4,3,2).

Ainsi $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ avec $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Remarque** : Si dim Kerf $\geq 1$, $E_0$ = Kerf, en effet

$v \in E_0$ si et seulement si $\mathbf{A}v = \mathbf{0}$ (ou $f(v) = \mathbf{0}$)

et de façon générale, tout espace propre associé à la valeur propre 0 est Kerf.