Leçon 04 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 10 : Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + 2y_t + 2 \\ y_{t+1} = -4x_t + 5y_t + 2^t \\ x_0 = 1 \text{ et } y_0 = 2 \end{cases}$

Solution

Le système s'écrit $X_{t+1} = \mathbf{A}X_t + F_t$ avec $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $F_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 2^t \end{pmatrix}$.

D'autre part, un calcul rapide donne : $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ avec $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En utilisant la formule : Si $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, $\mathbf{P}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, on a

$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Posons $Z_t = \mathbf{P}^{-1}X_t$. Alors Z_t vérifie : $Z_{t+1} = \mathbf{D}Z_t + \mathbf{P}^{-1}F_t$ avec $\mathbf{P}^{-1}F_t = \begin{pmatrix} 4 - 2^t \\ -2 + 2^t \end{pmatrix}$. Et si on note $Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$ on a à résoudre $\begin{cases} u_{t+1} = u_t + 4 - 2^t & (1) \\ v_{t+1} = 3v_t - 2 + 2^t & (2) \end{cases}$.

On résout alors successivement (1) et (2) (ici l'ordre de résolution n'a pas d'importance car **D** est diagonale):

$u_t = k_1 + u^*_t$ (k_1 est une constante dépendant des conditions initiales) avec u^*_t solution particulière de (1) de la forme : $u^*_t = Ct + a2^t$ (il y a **résonance** en le polynôme 4 du second membre et le coefficient 1 de u_t dans l'équation de départ). En écrivant que u^*_t vérifie (1), on obtient :

$C(t+1) + a2^{t+1} = Ct + a2^t + 4 - 2^t$, soit $(C-4) + 2^t(a+1) = 0$. Et $C = 4$, $a = -1$. D'où

$$\boxed{u_t = k_1 + u^*_t = k_1 + 4t - 2^t.}$$

.

La solution de l'équation homogène de (2) est $k_2 3^t$ (k_2 constante dépendant des conditions initiales) et une solution particulière v^*_t de (2) est de la forme :
$v^*_t = C + a2^t$ et puisque v^*_t vérifie (2) :

$C + a2^{t+1} = 3C + 3a2^t - 2 + 2^t$, soit $(-2C+2) + 2^t(-a - 1) = 0$. Et $C = 1$, $a = -1$.D'où

$$\boxed{v_t = k_2 3^t + v^*_t = k_2 3^t + 1 - 2^t}$$

Soit $Z_t = \begin{pmatrix} k_1 + 4t - 2^t \\ k_2 3^t + 1 - 2^t \end{pmatrix}$ et $X_t = \mathbf{P}Z_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 + 4t - 2^t \\ k_2 3^t + 1 - 2^t \end{pmatrix}$

$$X_t = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 3^t + 1 + 4t - 2^{t+1} \\ k_1 + 2k_2 3^t + 2 + 4t - 3.2^t \end{pmatrix}.$$

On détermine k_1 et k_2 en utilisant les conditions initiales. Or $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où

$\begin{cases} k_1 + k_2 - 1 = 1 \\ k_1 + 2\,k_2 - 1 = 2 \end{cases}$ et $k_1 = k_2 = 1$.

$$\text{Donc } X_t = \begin{pmatrix} 2 + 4t + 3^t - 2^{t+1} \\ 3 + 4t + 2.3^t - 3.2^t \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{cases} x_t = 2 + 4t + 3^t - 2^{t+1} \\ y_t = 3 + 4t + 2.3^t - 3.2^t \end{cases}.$$