Leçon 04 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 1 : Soit f une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ telle que
$f(x,y) = (2x-3y,-x+y)$. On considère la base canonique **b** et la base **c** = {(1,-1) , (2,0)}.
1. Donner la matrice **A** de f dans **b**.
2. Donner la matrice **B** de f dans **c**.
3. Donner la matrice de passage **P** de **b** vers **c**. Calculer $\mathbf{P}^{-1}$.
4. Vérifier la formule de la définition précédente.

N.B. : Si $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, $\mathbf{P}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Solution

1. $f(1,0) = (2 , -1)$ et $f(0,1) = (-3 , 1)$. Donc par définition (c.f. cours de L1)
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (les colonnes de **A** sont les coordonnées dans **b** des images des vecteurs de **b**).

2. Notons $e_1 = (1,-1)$ et $e_2 = (2,0)$. $f(e_1) = (5,-2)$ et $f(e_2) = (4,-2)$.
$f(e_1) = (5,-2)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans **c** signifie que $(5,-2) = xe_1 + ye_2$
ce qui s'écrit $(5 ,-2) = (x+2y,-x)$ et $\begin{cases} 5= x + 2y \\ -2 = -x \end{cases}$ d'où $x = 2$ et $y = \frac{3}{2}$. $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ est la première colonne de **B** (coordonnées de $f(e_1)$ dans **c**).
$f(e_2) = (4,-2)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans **c** si $(4,-2) = xe_1 + ye_2 = (x+2y,-x)$ et
$\begin{cases} 4= x + 2y \\ -2 = -x \end{cases}$ d'où $x = 2$ et $y = 1$. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la deuxième colonne de **B** (coordonnées de $f(e_2)$ dans **c**). Et

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit **P** la matrice de passage de **b** vers **c**, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$. On retrouve bien le résultat de 2).