Leçon 04 – Correction des "Avez-vous compris ?"

Avez-vous compris ? 5 : Soit A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calculer A^t et B^t.

Solution

En utilisant la méthode décrite dans le cours, $\mathbf{A} = 2\mathbf{I}_2 + \mathbf{J}(0)$.). $\mathbf{I}_2$ et $\mathbf{J}(0)$ commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton donnant le développement de $(a + b)^t$ pour a et b réels. De plus $\mathbf{J}(0)$ étant d'ordre 2, pour tout $k \geq 2$ $\mathbf{J}(0)^k = \mathbf{0}$, donc :

$$\mathbf{A}^t = (2\mathbf{I}_2 + \mathbf{J}(0))^t = (2\mathbf{I}_2)^t + t(2\mathbf{I}_2)^{t-1}\mathbf{J}(0) = 2^t\mathbf{I}_2 + t2^{t-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^t & t2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}.$$

De même $\mathbf{B} = 2\mathbf{I}_3 + \mathbf{J}(0)$. I_3 et $\mathbf{J}(0)$ commutent et $\mathbf{J}(0)$ étant d'ordre 3, pour tout $k \geq 3$ $\mathbf{J}(0)^k = \mathbf{0}$, donc :

$$\mathbf{B}^t = (2\mathbf{I}_3 + \mathbf{J}(0))^t = (2\mathbf{I}_3)^t + t(2\mathbf{I}_3)^{t-1}\mathbf{J}(0) + \frac{t(t-1)}{2}(2\mathbf{I}_3)^{t-2}(\mathbf{J}(0))^2,$$

$$\mathbf{B}^t = 2^t\mathbf{I}_3 + t2^{t-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t(t-1)}{2}2^{t-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^t & t2^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2}2^{t-2} \\ 0 & 2^t & t2^{t-1} \\ 0 & 0 & 2^t \end{pmatrix}.$$