Leçon 04 – Correction des "Avez-vous compris ?"

Avez-vous compris ? 4 : 1) Soit $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)^5(-2 - \lambda)^3(-1 - \lambda)^2$.
On Précise aussi que $\dim E_1 = 4$, $\dim E_{-2} = 2$ et $\dim E_{-1} = 2$. Donner une forme réduite de Jordan de **A**.

2) Soit

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la forme réduite de Jordan de **B**. Donner le polynôme caractéristique de **B** et la dimension des sous-espaces propres de **B**.

Solution

1) Notons f l'application linéaire qui a pour matrice **A** dans la base canonique.
Notons de la même façon un vecteur V et la matrice colonne deses coordonnées dans la base canonique.
Il y a 4 vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre 1 (base de E_1), V_1, V_2, V_3 et V_4. $m(1) = 5$ et $\dim E_1 = 4$, il y a donc un vecteur de Jordan V_5 associé à V_4 et la valeur propre 1.
Il y a 2 vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre -2 (base de E_{-2}), V_6 et V_7. $m(-2) = 3$ et $\dim E_{-2} = 2$, il y a donc un vecteur de Jordan V_8 associé à V_7 et la valeur propre -2.
Il y a 2 vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre -1 (base de E_{-1}), V_9 et V_{10}.
On a
$f(V_1) = V_1$,
$f(V_2) = V_2$, ,
$f(V_3) = V_3$,
$f(V_4) = V_4$,
$f(V_5) = V_4 + V_5$,
$f(V_6) = -2V_6$,
$f(V_7) = -2V_7$,
$f(V_8) = V_7 - 2V_8$,
$f(V_9) = -V_9$,

$f(V_{10}) = -V_{10}$.
Dans la base $\{V_1 , V_2 , V_3 , V_4, V_5 , V_6 , V_7 , V_8 , V_9\ V_{10}\}$ la matrice de f est :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

C'est la réduite de Jordan de **A**.

2) D'après la diagonale de **J**, **B** a pour valeurs propres : $\lambda_1 = -2$ avec $m(\lambda_1) = 4$, $\lambda_2 = 1$ avec $m(\lambda_2) = 3$ et $\lambda_3 = 0$ avec $m(\lambda_3) = 3$. Donc $P_{\mathbf{B}}(\lambda) = (-2 - \lambda)^4(1 - \lambda)^3\lambda^3$.
D'autre part il y a 2 vecteurs propres indépendants associés à λ_1 donc $\dim E_{\lambda 1} = 2$, Il y a un seul vecteur propre libre associé à λ_2 donc $\dim E_{\lambda 2} = 1$ et il y a 2 vecteurs propres indépendants associés à λ_3 donc $\dim E_{\lambda 3} = 2$.