# *Rappel : Suites récurrentes*

## 1. Les suites récurrentes linéaires du 1er ordre à coefficients constants.

### 1.1. Définitions

Ce sont les suites u définies par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + g(n) \end{cases}$ $a \in \mathbf{R}^*$ (1)

L'équation homogène associée à (1) est : $v_{n+1} = av_n$ (2).

***Théorème*** *: Si $u^*$ est une solution particulière de (1) et si v est la solution générale de (2) (équation homogène associée à (1)), la solution générale de (1) est*

$$\boldsymbol{u = u^* + v}.$$

**Démonstration** :

Soit $u^*$ une solution particulière de (1) : $u^*_{n+1} = au^*_n + g(n)$

u est une solution quelconque de (1) si et seulement si $u_{n+1} = au_n + g(n)$

Soit : $u_{n+1} - u^*_{n+1} = a(u_n - u^*_n)$ et $u - u^*$ est solution de (2).

Or les solutions de (2) sont de la forme : $\boxed{v_n = v_0a^n}$

Donc $\boxed{u_n = u^*_n + v_0a^n}$ $v_0 \in \mathbf{R}$ (*remarque* : $u_0 = u^*_0 + v_0$)

**Exercez-vous 1**

1. Déterminer la suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = -5 \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases}$

2. Déterminer la suite v définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ v_{n+1} = -2v_n \end{cases}$

### 1.2. Recherche de la solution particulière de (1)

*__Cas où g(n) = P(n)__ avec P est un polynôme de degré k.

**Si a ≠ 1** alors une solution particulière est un polynôme Q(n) de degré k.

**Si a = 1** , une solution particulière est de la forme nQ(n) , où Q est un polynôme de degré k (on dit qu'il y a **résonance**).

N.B. : g(n) = b (cte) est un cas particulier de celui-ci, il correspond à k = 0.

***Cas où $g(n) = Ct^n$** (C et t constantes réelles données)
**Si $t \neq a$** une solution particulière est sous la forme : $u^*_n = Kt^n$ (K constante à déterminer)
**Si t = a** une solution particulière est sous la forme $u^*_n = Kna^n$ (phénomène de **résonance**)

*Remarque :* on peut remplacer C par un polynôme de degré k, K est alors remplacé par un polynôme quelconque de degré k.

*Si $u^*_n$ est solution particulière de $u_{n+1} = au_n + g_1(n)$ et si $w^*_n$ est une solution particulière de $u_{n+1} = au_n + g_2(n)$ alors $u^*_n + w^*_n$ est une solution particulière de $u_{n+1} = au_n + g_1(n) + g_2(n)$.

**Exemples**

| Equation | Solution de l'équation homogène associée | Forme de la solution particulière |
|---|---|---|
| $u_{n+1} = 2u_n + 3.5^n$ | $v_n = v_0\, 2^n$ | $u^*_n = C.5^n$ |
| $u_{n+1} = 2u_n + n^2 - n$ | $v_n = v_0\, 2^n$ | $u^*_n = an^2 + bn + c$ |
| $u_{n+1} = 2u_n + 3.2^n$ | $v_n = v_0\, 2^n$ | $u^*_n = Cn.2^n$ |
| $u_{n+1} = u_n + n^2 - n$ | $v_n = v_0$ | $u^*_n = n(an^2 + bn + c)$ |

Il y a résonance pour les deux dernières équations.

**Exercez-vous 2**

1. Déterminer la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + n^2 - 3n + 1 \quad (1) \end{cases}$.

2. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + \frac{1}{2}3^n \quad (1) \end{cases}$.

3. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2^{n-1} \quad (1) \end{cases}$.

# 2. Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants.

## 2.1. Définitions

Ces suites sont définies par $u_0$ et $u_1$ et une relation de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 \\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g(n) \qquad b \in \mathbf{R}^*,\ c \in \mathbf{R}^* \qquad (1) \end{cases}}$$

L'équation homogène associée à (1) est :

$$\boxed{v_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = 0 \qquad (2).}$$

***Théorème** : Si $u^*$ est une solution particulière de (1) et si v est la solution générale de (2), la solution générale de (1) est : $u = u^* + v$.*

*Même démonstration que pour les suites récurrentes linéaires du $1^{er}$ ordre .*

## 2.2. Solution générale de l'équation homogène (2)

L'équation caractéristique de (2) est : $r^2 + br + c = 0$ (3).

***Si $\Delta > 0$** (3) a deux solutions distinctes $r_1$ et $r_2$, et*

$$\boldsymbol{v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n} \text{ est la solution générale de (2).}$$

*($\lambda$ et $\mu$ sont des réels dépendant des conditions initiales $u_0$ et $u_1$)*

**Exercez-vous 3**

1. Déterminer v telle que : $\begin{cases} v_0 = 1 \ , \ v_1 = 2 \\ v_{n+2} = -3v_{n+1} - 2v_n \quad (2) \end{cases}$ .
2. Déterminer v telle que : $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 4v_n$

***Si $\Delta = 0$** (3) a une solution double $r_0$ , et*

$$\boldsymbol{v_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n} \text{ est la solution générale de (2).}$$

*($\lambda$ et $\mu$ sont des réels dépendant des conditions initiales $u_0$ et $u_1$)*

**Exercez-vous 4**

Déterminer v telle que : $\begin{cases} v_0 = 1 \ , \ v_1 = 0 \\ v_{n+2} \ -6v_{n+1} + 9v_n = 0 \end{cases}$

Le cas $\boldsymbol{\Delta < 0}$ n'est pas étudié dans le cadre de ce cours et sera traité dans le cours de L3 après l'introduction des nombres complexes.

### 2.3. Recherche de la solution particulière de (1)

***Cas où g(n) = P(n)** avec P est un polynôme de degré k.

**Si 1 n'est pas racine de (3)** , on cherche une solution particulière $u^*$ de (1) sous la forme d'un polynôme Q de degré k : $u^*_n = Q(n)$.
**Si 1 est racine simple de (3)**, $u^*$ est de la forme : $u^*_n = nQ(n)$ (résonance).
**Si 1 est racine double** de (3), $u^*$ est de la forme : $u^*_n = n^2Q(n)$ (double résonance).

***Cas où g(n) = $Ct^n$** (C et t sont des réels non nuls donnés).

**Si t n'est pas racine de (3)**, une solution particulière $u^*$ de (1) est de la forme
$u^*_n = kt^n$ (k constante réelle à déterminer).

**Si t est racine simple de (3)**, une solution particulière $u^*$ de (1) est de la forme
$u^*_n = knt^n$ (résonance). k constante réelle à déterminer.
**Si t est racine double de (3)**, une solution particulière $u^*$ de (1) est de la forme
$u^*_n = kn^2t^n$ (double résonance). k constante réelle à déterminer.

*Si $u^*_n$ est solution particulière de $u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g_1(n)$ et si $w^*_n$ est une solution particulière de $u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g_2(n)$ alors $u^*_n + w^*_n$ est une solution particulière de $u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g_1(n) + g_2(n)$.

**Exemples**

| **Equation** | **Racines de l'équation caractéristique** | **Solution de l'équation homogène** | **Forme de la solution particulière** |
|---|---|---|---|
| $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 3.5^n$ | 2 et 3 | $v_0 = \lambda 2^n + \mu 3^n$ | $u^*_n = C.5^n$ |
| $u_{n+2} - 5u_{n+1}+6u_n = n^2 - n$ | 2 et 3 | $v_0 = \lambda 2^n + \mu 3^n$ | $u^*_n = an^2 + bn + c$ |
| $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 3.5^n$ | 2, racine double | $v_0 = \lambda 2^n + \mu n 2^n$ | $u^*_n = C.5^n$ |
| $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 3.2^n$ | 2 et 3 | $v_0 = \lambda 2^n + \mu 3^n$ | $u^*_n = Cn.2^n$ |
| $u_{n+2} - 3u_{n+1}+2u_n = n^2 - n$ | 1 et 2 | $v_0 = \lambda + \mu 2^n$ | $u^*_n = n(an^2 + bn + c)$ |
| $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 3.2^n$ | 2, racine double | $v_0 = \lambda 2^n + \mu n 2^n$ | $u^*_n = Cn^2.2^n$ |
| $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = n^2 - n$ | 1, racine double | $v_0 = \lambda + \mu n$ | $u^*_n = n^2(an^2 + bn + c)$ |

**Exercez-vous 5**

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n + 6n^2 - 2n - 3 \ (1) \end{cases}$ .

2. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + 6n - 5 \quad (1) \end{cases}$ .

3. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 , \ u_1 = -1 \\ u_{n+2} \ -6u_{n+1} + 9u_n = -25(-2)^n \quad (1) \end{cases}$

# *Correction des "Exercez-vous"*

**Exercez-vous 1**

1. Déterminer la suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = -5 \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases}$

2. Déterminer la suite v définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ v_{n+1} = -2v_n \end{cases}$

**Solution**

1. On reconnaît la relation de récurrence correspondant à une suite géométrique de raison3 (c.f. le cours de L1). Donc $v_n = v_0\ (3^n) = -5(3^n)$.

2. Pour les mêmes raisons $v_n = 4(-2)^n$.

**Exercez-vous 2**

1. Déterminer la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + n^2 - 3n + 1 \quad (1) \end{cases}$.

2. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + \frac{1}{2}3^n \quad (1) \end{cases}$.

3. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2^{n-1} \quad (1) \end{cases}$.

**Solution**

1. D'après le cours $u_n = v_n + u^*_n$, où $(u^*_n)$ est une solution particulière de (1) et $(v_n)$ une solution de l'équation homogène associée : $v_{n+1} = 3v_n$ (2).

L'équation homogène associée (2) a pour solution $v_n = v_0 3^n$ .

D'après le cours une solution particulière de (1) est de la forme :
$u^*_n = an^2 + bn + c$. En écrivant que $u^*_n$ vérifie (1), on obtient :
$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2an^2 + 3bn + 3c + n^2 - 3n + 1$

D'où $\forall n \in \mathbf{N}$ : $n^2(-2a-1) + n(2a-2b+3) + a + b - 2c - 1 = 0$ et $a = -\frac{1}{2}$ , $b = 1$ et $c = -\frac{1}{4}$ .

Donc $u^*_n = -\frac{1}{2}n^2 + n - \frac{1}{4}$ et $u_n = v_0 3^n - \frac{1}{2}n^2 + n - \frac{1}{4}$ .

Or $u_0 = -1$ soit $v_0 - \frac{1}{4} = -1$ et $v_0 = -\frac{3}{4}$ d'où $\boxed{u_n = -\frac{3}{4}\ 3^n - \frac{1}{2}\ n^2 + n - \frac{1}{4}}$

2. En procédant de même :
La solution de l'équation homogène est : $v_n = v_0(-2)^n$.

Une solution particulière de (1) est d'après le cours de la forme : $u^*_n = k3^n$.
D'où $k3^{n+1} = -2k3^n + \frac{1}{2}\ 3^n$ soit $5k = \frac{1}{2}$ et $u^*_n = \frac{3^n}{10}$. Donc $u_n = v_0(-2)^n + \frac{3^n}{10}$.

Or $u_0 = 1$ d'où : $v_0 + \frac{1}{10} = 1$ et $v_0 = \frac{9}{10}$. Donc $\boxed{u_n = \frac{9}{10}(-2)^n + \frac{3^n}{10}}$.

3. Toujours par la même méthode :
La solution de l'équation homogène associée est : $v_n = v_0 2^n$.

Une solution particulière de (1) est de la forme: $u^*_n = kn2^n$ (en effet $2^{n-1} = \frac{1}{2}\ 2^n$ et 2 est aussi la raison de v, ici il y a un phénomène de **résonance**) et puisque $u^*_n$ est solution de (1), k vérifie : $k(n+1)2^{n+1} = kn2^{n+1} + \frac{1}{2}\ 2^n$. D'où $k = \frac{1}{4}$ et $u_n = v_0 2^n + \frac{1}{4}\ n2^n$.

Or $u_0 = 5$, d'où $v_0 = 5$ et $\boxed{u_n = 5.\ 2^n + \frac{1}{4} n\ 2^n}$.

**Exercez-vous 3**

1. Déterminer v telle que : $\begin{cases} v_0 = 1\ ,\ \ v_1 = 2 \\ v_{n+2} = -3v_{n+1} - 2v_n \quad (2) \end{cases}$.

2. Déterminer v telle que : $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 4v_n$

**Solution**

1. L'équation caractéristique associée à (2) est $r^2 + 3r + 2 = 0$. $r_1 = -1$ est une racine évidente et puisque le produit des racines est 2, la deuxième racine est $r_2 = -2$.
Donc d'après de cours les solutions de (2) sont de la forme $v_n = \lambda(-1)^n + \mu(-2)^n$.

$\lambda$ et $\mu$ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.
Et puisque $v_0 = 1$ et $v_1 = 2$, on a $\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 2 = -\lambda - 2\mu \end{cases}$. Soit $\lambda = 4$ et $\mu = -3$, d'où
$\boxed{v_n = 4(-1)^n - 3(-2)^n}$

2. L'équation caractéristique associée à (2) est $r^2 - 5r + 4 = 0$. $r_1 = 1$ est une racine évidente et puisque le produit des racines est 4 la deuxième racine est $r_2 = 4$.
Donc d'après de cours les solutions de (2) sont de la forme $v_n = \lambda + \mu(4)^n$.

$\lambda$ et $\mu$ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales. Ici on a pas de conditions initiales, on ne peut donc pas calculer ces deux constantes et on écrira : $\boxed{v_n = \lambda + \mu(4)^n}$.

**Exercez-vous 4**

Déterminer v telle que : $\begin{cases} v_0 = 1\ ,\ \ v_1 = 0 \\ v_{n+2}\ -6v_{n+1} + 9v_n = 0 \end{cases}$

**Solution**

L'équation caractéristique associée à (2) est $r^2 - 6r + 9 = 0$. Soit $(r-3)^2 = 0$. $r_0 = 3$ est une racine double. Donc d'après de cours les solutions de (2) sont de la forme
$v_n = \lambda(3)^n + \mu n(3)^n$ .

$\lambda$ et $\mu$ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

Et puisque $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on a : $\begin{cases} 1 = \lambda \\ 0 = 3\lambda + 3\mu \end{cases}$ . D'où $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ et $v_n = 3^n - n3^n$.

**Exercez-vous 5**

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n + 6n^2 - 2n - 3\ (1) \end{cases}$ .

2. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + 6n - 5\quad (1) \end{cases}$ .

3. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1\ ,\ \ u_1 = -1 \\ u_{n+2}\ -6u_{n+1} + 9u_n = -25(-2)^n\quad (1) \end{cases}$

**Solution**

1. D'après le cours $u_n = u^*_n + v_n$, où $(u^*_n)$ est une solution particulière de (1) et $(v_n)$ une solution de l'équation homogène associée à (1) : $v_{n+2} = -3v_{n+1} - 2v_n$ (2). Or d'après l'exercice **3.** ci-dessus, $v_n = \lambda(-1)^n + \mu(-2)^n$ ($\lambda$ et $\mu$ sont deux réels à déterminer par les conditions initiales).

Une solution particulière $(u^*_n)$ de (1) est, d'après le cours de la forme $u^*_n = an^2 + bn + c$ d'où, en écrivant que $u\mu_n$ vérifie (1) :
$a(n+2)^2 + b(n+2) + c = -3a(n+1)^2 - 3b(n+1) - 3c - 2an^2 - 2bn - 2c + 6n^2 - 2n - 3$
Soit $\forall n \in \mathbf{N}$ : $n^2(6a-6) + n(10a+6b+2) + (7a+5b+6c+3) = 0$ D'où a=1 ; b=-2 et c=0.
Donc $u^*_n = n^2 - 2n$ et $u_n = \lambda(-1)^n + \mu(-2)^n + n^2 - 2n$.

Or $u_0 = u_1 = 1$ d'où :

$\begin{cases} \lambda+\mu=1 \\ -\lambda-2\mu=2 \end{cases}$ soit $\mu = -3$ et $\lambda = 4$ . Donc $\boxed{u_n = 4(-1)^n - 3(-2)^n + n^2 - 2n}$.

2. Par une méthode analogue et en utilisant le résultat de **3.,** la solution de l'équation homogène associée à (1) est $v_n = \lambda + \mu(4)^n$ (les constantes $\lambda$ et $\mu$ seront déterminées à l'aide des conditions initiales).

Une solution particulière de (1) est de la forme : $u^*_n = n(an+b) = an^2 + bn$ (car 1 est racine de l'équation caractéristique, il y a donc **résonance**). On détermine a et b en écrivant que $u^*_n$ vérifie (1) :
$a(n+2)^2 + b(n+2) = 5a(n+1)^2 + 5b(n+1) - 4an^2 - 4bn + 6n - 5$

Soit $\forall n \in \mathbf{N}$ : $n^2(a-a) + n(4a+b-10a-b-6) + (4a+2b-5a-5b+5) = 0$. D'où $a=-1$ et $b=2$.
Donc $u_n = \lambda + \mu(4^n) - n^2 + 2n$.

Or $u_o = 0$ et $u_1 = -1$ donc: $\begin{cases} \lambda+\mu=0 \\ \lambda+4\mu=-2 \end{cases}$ soit $\mu = -\frac{2}{3}$ et $\lambda = \frac{2}{3}$.

$$\text{Soit } \boxed{u_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(4^n) - n^2 + 2n}.$$

3. Par une méthode analogue et en utilisant le résultat de **4.,** la solution de l'équation homogène associée à (1) est $v_n = \lambda(3)^n + \mu n(3)^n$ (les constantes $\lambda$ et $\mu$ seront déterminées à l'aide des conditions initiales).

Une solution particulière de (1) est de la forme : $u^*_n = k(-2)^n$. On détermine k en écrivant que $u^*_n$ vérifie (1) : $k(-2)^{n+2} - 6k(-2)^{n+1} + 9k(-2)^n = -25(-2)^n$. En divisant membre à membre par $-(2)^n$ on obtient $4k + 12k + 9k = -25$. D'où $k = -1$, $u^*_n = -(-2)^n$ et
$u_n = -(-2)^n + \lambda(3)^n + \mu n(3)^n$.

On détermine $\lambda$ et $\mu$ à l'aide des conditions initiales.
Or $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$, on obtient donc $\begin{cases} 1 = -1 + \lambda \\ -1 = 2 + 3\lambda + 3\mu \end{cases}$. D'où $\lambda = 2$ et $\mu = -3$ et

$$\boxed{u_n = -(-2)^n + 2(3)^n - n(3)^{n+1}}.$$