L3 économie appliquée
Aunège
Université Paris-sud
0dile Brandière

Correction des exercices de la leçon 3 : Somme de sous-espaces vectoriels- Produit scalaire - Projections

1. 1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Les vecteurs v_1, v_2 et w sont donc liés et $\dim F_1 \leq 2$.

$\{v_1, v_2\}$ est un système libre de deux vecteurs de F_1, c'est une base de F_1 et $\dim F_1 = 2$.

Un vecteur v de F_1 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2 et s'écrit $\alpha v_1 + \beta v_2$, α et β réels quelconques. Donc $v = (2\alpha - \beta, \alpha, \beta)$, et

$$v = (x, y, z) \in F \Longleftrightarrow x = 2y - z.$$

On peut aussi écrire que $v = (x, y, z) \in F_1$ si et seulement si $\det(v_1, v_2, v) = 0$, soit $\begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$, soit $x - 2y + z = 0$.

2) Si $v = (0, a + b, -b) \in F_2$, $v = a(0, 1, 0) + b(0, 1, -1)$. F_2 est donc l'ensemble des combinaisons linéaire de $u_1 = (0, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$, c'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $\{u_1, u_2\}$ en est un système générateur. D'autre part u_1 et u_2 sont indépendants (car non proportionnels), ils forment donc une base de F_2 et $\dim F_2 = 2$.

Remarque: En fait $\{v = (x, y, z) \in F_2\} \Longleftrightarrow \{x = 0\}$.

2)$\{v = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2\} \Longleftrightarrow \{x = 2y - z \text{ et } x = 0\}$.

$\{v = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2\} \Longleftrightarrow \{x = 0 \text{ et } z = 2y\}$.

$\{v = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2\} \Longleftrightarrow \{v = (0, y, 2y) = y(0, 1, 2)\}$.

$F_1 \cap F_2$ est donc le sous-espace vectoriel engendré par $u_3 = (0, 1, 2)$ et $\dim F_1 \cap F_2 = 1$.

$\{v \in F_1 + F_2\} \Longleftrightarrow \{v = V_1 + V_2 \ , \ V_1 \in F_1 \ , \ V_2 \in F_2\}$.

Puisque $\{v_1, v_2\}$ est une base de F_1 et $\{u_1, u_2\}$ une base de F_2,

$v = (av_1 + bv_2) + (cu_1 + du_2)$ et $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ est un système générateur de $F_1 + F_2$. Ce système de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est évidemment lié. Par contre $\{v_1, v_2, u_1\}$ est libre (on vérifie en effet que $\det(v_1, v_2, u_1) \neq 0$), c'est donc une base de $F_1 + F_2$ et $\dim(F_1 + F_2) = 3$. On en déduit donc que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$ (le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension

3 est $\mathbb{R}^3$). La somme $F_1 + F_2$ n'est pas directe car $F_1 \cap F_2 \neq \{(0,0,0)\}$ (on a aussi $\dim(F_1 + F_2) \neq \dim F_1 + \dim F_2$).

2. 1) On remarque que $2u_1 - u_2 = u_3$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ est donc lié. u_1 et u_2 sont indépendants (non proportionnels) et forment donc une base de F_1 et $\dim F_1 = 2$.

   D'autre part $\{v_1, v_2\}$ est libre (les vecteurs ne sont pas proportionnels), c'est donc une base de F_2 et $\dim F_2 = 2$.

   2) F_1 est engendré par $\{u_1, u_2\}$ et F_2 est engendré par $\{v_1, v_2\}$, $F_1 + F_2$ est donc engendré par $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$.

   Or $\det(u_1, u_2, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -16 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & -16 & -2 \\ -1 & -7 & -1 \end{vmatrix}$, et $\det(u_1, u_2, v_1, v_2) = -30 \neq 0$. $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ est un système libre de $\mathbb{R}^4$, c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et puisque c'est un système générateur de $F_1 + F_2$, $\dim(F_1 + F_2) = 4$ et $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^4$.

   $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ est une base de $F_1 + F_2$ donc pour tout vecteurs v de $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^4$, il existe a, b, c et d, uniques tels que $v = au_1 + bu_2 + cv_1 + dv_2$. $au_1 + bu_2 = V_1 \in F_1$ et $cv_1 + dv_2 = V_2 \in F_2$, sonr uniques. La décomposition $v = V_1 + V_2$ de v est donc unique et la somme est directe : $F_1 \bigoplus F_2$.

3. Soit p l'application linéaire cherchée. Remarquons d'abord que $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

   $\mathcal{B} = \{V_1, V_2, Y\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Si $F_1 =< V_1, V_2 >$ et $F_2 =< Y >$, $F_1 \bigoplus F_2 = \mathbb{R}^3$ et la projection p sur F_1 parallèlement à F_2 est bien définie.

   Si $v = (x, y, z) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma Y$ et $p(v) = \alpha V_1 + \beta V_2$.

   Calculons α et β, les deux premières coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.

   $\{v = (x, y, z) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma Y\} \Longleftrightarrow \{v = (x, y, z) = (-\alpha + \gamma, \beta, \alpha + \gamma)\}$.

   D'où $\begin{cases} x = -\alpha + \gamma \\ y = \beta \\ z = \alpha + \gamma \end{cases}$ et $\alpha = \frac{-x+z}{2}$ et $\beta = y$.

   Donc $p(x, y, z) = \alpha V_1 + \beta V_2 = \frac{-x+z}{2}(-1, 0, 1) + y(0, 1, 0) = (\frac{x-z}{2}, y, \frac{-x+z}{2})$.

4. 1) $V_1.V_2 = -1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3} = 2$.

   $\|V_1\| = \sqrt{1 + 3 + 1 + 4} = 3$.

   $\|V_2\| = \sqrt{1 + 4 + 9 + 3} = \sqrt{17}$.

   2) $V_1.V_2 = 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$.

   $\|V_1\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$.

   $\|V_2\| = \sqrt{1 + 2 + 2} = \sqrt{5}$.

5. 1) $v_1.v_2 = -1 + 1 = 0$. v_1 et v_2 sont orthogonaux et non nuls, ils sont donc indṕendants d'après le cours.

   2) $v_3 = (x, y, z)$ convient si et seulement si c'est un vecteur à la fois orthogonal à v_1 et v_2. Donc $\left\{\begin{array}{l} v_1.v_3 = 0 \\ v_2.v_3 = 0 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{l} y = 2x \\ z = x \end{array}\right.$ et $v_3 = (1, 2, 1)$ convient.

   Première méthode

   Si $w = (1, 0, 0) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de w dans $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

   On a $(1, 0, 0) = (\alpha-\beta+\gamma, -\alpha+2\gamma, \alpha+\beta+\gamma)$, soit $\left\{\begin{array}{l} 1 = \alpha - \beta + \gamma \\ 0 = -\alpha + 2\gamma \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \end{array}\right.$, et $\left\{\begin{array}{l} \alpha = 2\gamma \\ 3\gamma - \beta = 1 \\ 3\gamma + \beta = 0 \end{array}\right.$.

   D'où $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{6}$ et les coordonnées de w dans $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

   Deuxième méthode

   Si $w = (1, 0, 0) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

   $w.v_1 = \alpha\|v_1\|^2$ car la base est orthogonale et que $v_1.v_2 = v_1.v_3 = 0$. Donc $\alpha = \frac{w.v_1}{\|v_1\|^2} = \frac{1}{3}$.

   De même $w.v_2 = \beta\|v_2\|^2$ et $\beta = \frac{w.v_2}{\|v_2\|^2} = -\frac{1}{2}$.

   Et $w.v_3 = \gamma\|v_3\|^2$ et $\gamma = \frac{w.v_3}{\|v_3\|^2} = \frac{1}{6}$.

6. $< v >$ et F sont supplémentaires d'après le cours et $\dim < v > + \dim F = \dim \mathbb{R}^3$. Donc $\dim F = 2$.

   $$\{u = (x, y, z) \in F\} \Longleftrightarrow \{u.v = 0\},$$
   $$\{u = (x, y, z) \in F\} \Longleftrightarrow \{x - z = 0\}.$$

   Donc $F = \{(x, y, z)\ ;\ x = z\}$.

   $\{u = (x, y, z) \in F\} \Longleftrightarrow \{u = (x, y, x) = x(1, 0, 1)+y(0, 1, 0)\}$. $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ est donc un système générateur de F. Ces deux vecteurs sont indépendants (non proportionnels) et forment une base de F.

7. $v_1.v_2 = 0 - 1 + 0 + 1 = 0$. v_1 et v_2 sont donc bien orthogonaux. Soit $F =< v_1, v_2 >$, on cherche donc $F^\perp$.

   $\{u = (x, y, z, t) \in F^\perp\} \Longleftrightarrow \{u \perp v_1 \ \text{ et } \ u \perp v_2\}$.

   Soit $\left\{\begin{array}{l} x - y + z + t = 0 \\ y + t = 0 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} t = -y \\ z = 2y - x \end{array}\right.$. Donc

   $\{u = (x, y, z, t) \in F^\perp\} \Longleftrightarrow \{u = (x, y, 2y - x, -y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 2, -1)\}$

Ainsi $F^\perp$ est engendré par $u_1 = (1,0,-1,0)$ et $u_2 = (0,1,2,-1)$. Ces deux vecteurs forment une base de $F^\perp$ puisqu'ils sont de surcroît indépendants, et $\dim F^\perp = 2$.

On a aussi l'expression de $F^\perp$ sous les formes:

$F^\perp = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ y+t=0 \text{ et } x-y+z+t=0\}$

$F^\perp = \{(x,y,2y-x,-y) \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ y \in \mathbb{R}\}$.

8. $\|v_1\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = 1$, v_1 est donc bien normé.

   De façon évidente $v_2 = (1,0,0,2)$ est orthogonal à v_1, ainsi que $v_3 = (0,3,-\sqrt{2},0)$. Et bien sûr v_2 est orthogonal à v_3.

   Reste à trouver un vecteur v_4 orthogonal à la fois à v_1, v_2 et v_3 puis à normer tous les vecteurs qui ne le sont pas.

   $v_4 = (x,y,z,t)$ est orthogonal à v_1, v_2 et v_3 si et seulement si $\begin{cases} v_4.v_1 = 0 \\ v_4.v_2 = 0 \\ v_4.v_3 = 0 \end{cases}$, c'est à dire

   $$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{4} + \frac{3z}{4} - \frac{t}{4} = 0 \\ x + 2t = 0 \\ 3y - z\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2t \\ y = z\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -t + z\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3z}{4} - \frac{t}{4} = 0 \end{cases}.$$

   On obtient alors $\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{3}z \\ t = \frac{11}{15}z \end{cases}$ et $v_4 = (-22, 5\sqrt{2}, 15, 11)$ convient. Reste à normer v_2, v_3 et v_4.

   $\|v_2\|^2 = 1 + 4 = 5$

   $\|v_3\|^2 = 9 + 2 = 11$

   $\|v_4\|^2 = 484 + 50 + 225 + 121 = 880 = (4\sqrt{55})^2$.

   Une base solution (il y en plusieurs possible bien sûr) est

   $\{v_1, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}, \frac{v_4}{\|v_4\|}\} = \{(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}), (\frac{5}{5}, 0, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}), (0, \frac{3\sqrt{11}}{11}, \frac{-\sqrt{22}}{11}, 0), (\frac{-\sqrt{55}}{10}, \frac{\sqrt{110}}{44}, \frac{3\sqrt{55}}{44}, \frac{\sqrt{55}}{20})\}$.

9. Il y a deux méthodes possibles ici.

   Première méthode

   On peut vérifier que les colonnes de M sont normées et ortogonales deux à deux :

   Pour la première colonne C_1 : $\|C_1\|^2 = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 = 1$,

   pour la deuxième colonne C_2 : $\|C_2\|^2 = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = 1$,

   pour la troisième colonne C_3 : $\|C_3\|^2 = (\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = 1$,

   $C_1.C_2 = \frac{1}{9}(4-2-2) = 0$,

   $C_1.C_3 = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$,

   $C_2.C_3 = \frac{1}{9}(-2-2+4) = 0$.

   M est bien orthogonale.

   Deuxième méthode

On peut faire le produit ${}^tMM$ et vérifier que l'on obtient bien la matrice identité, cela voudra alors dire que ${}^tM = M^{-1}$ et d'après le cours cela équivaut bien à M orthogonale.

${}^tMM = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. D'où le résultat.

10. (a) $\{v = (x, y, z) \in F\} \iff \{v = (x, y, 2y - x) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2)\}$.
Ainsi $e_1 = (1, 0, -1)$ et $e_2 = (0, 1, 2)$ forment un système générateur de F. De plus ces vecteurs sont indépendants (non proportionnels), ils forment donc une base de F et F est de dimension 2.

(b) $\{v = (x, y, z) \in F^\perp\} \iff \{v \perp e_1 \text{ et } v \perp e_2\}$,
$\{v = (x, y, z) \in F^\perp\} \iff \left\{\begin{array}{l} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array}\right.$, donc $v = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1)$.
Ainsi $F^\perp$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $e_3 = (1, -2, 1)$ et $F^\perp$ est de dimension 1.

(c) On sait que $F \bigoplus F^\perp = \mathbb{R}^3$ et que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$, la décomposition $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F$ et $v_2 \in F^\perp$ est unique. Alors si p est la projection orthogonale sur F, $p(v) = v_1$.
Or $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ est une base de F, $\mathcal{B}_2 = \{e_3\}$ est une base de $F^\perp$ et
$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique de la forme :
$v = (x, y, z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$ et nécessairement
$p(v) = v_1 = \alpha e_1 + \beta e_2$. Pour déterminer p il suffit donc de calculer α et β en fonction de x , y et z.
Or $\{v = (x, y, z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\} \iff \{(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 2) + \gamma(1, -2, 1)\}$, soit $\left\{\begin{array}{l} x = \alpha + \gamma \\ y = \beta - 2\gamma \\ z = -\alpha + 2\beta + \gamma \end{array}\right.$, d'où $\left\{\begin{array}{l} 3\beta = x + y + z \\ 2\alpha + \beta = 2x + y \end{array}\right.$, $\alpha = \frac{1}{6}(5x + 2y - z)$ et
$\beta = \frac{1}{3}(x + y + z)$.
On en déduit alors que
$p(x, y, z) = \frac{1}{6}(5x + 2y - z)e_1 + \frac{1}{3}(x + y + z)e_2 = (\frac{5x+2y-z}{6}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{-x+2y+5z}{6})$

(d) On déduit de la question précédente que si P est la matrice de p dans la base canonique :

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(e) D'après le cours $w = p(v)$, donc $w = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

11. (a) Déterminons d'abord une base de F :
$\{v = (x, y, z, t) \in F\} \Longleftrightarrow \{v = (y - t, y, y + 2t, t) = y(1, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 2, 1)\}$.
Ainsi $e_1 = (1, 1, 1, 0)$ et $e_2 = (-1, 0, 2, 1)$ forment un système générateur de F. De plus ces vecteurs sont indépendants (non proportionnels), ils forment donc une base de F et F est de dimension 2.

$\{v = (x, y, z) \in F^\perp\} \Longleftrightarrow \{v \perp e_1 \text{ et } v \perp e_2\}$,
$\{v = (x, y, z, t) \in F^\perp\} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2z + t = 0 \end{cases}$,
donc $v = (x, -x - z, z, x - 2z) = x(1, -1, 0, 1) + z(0, -1, 1, -2)$.
Ainsi $F^\perp$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $e_3 = (1, -1, 0, 1)$ et $e_4 = (0, -1, 1, -2)$, $F^\perp$ est de dimension 2.

(b) On sait que $F \bigoplus F^\perp = \mathbb{R}^4$ et que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^4$, la décomposition $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F$ et $v_2 \in F^\perp$ est unique. Alors si p est la projection orthogonale sur F, $p(v) = v_1$.
Or $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ est une base de F, $\mathcal{B}_2 = \{e_3, e_4\}$ est une base de $F^\perp$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et tout vecteur $v = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique de la forme :
$v = (x, y, z, t) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$ et nécessairement $p(v) = v_1 = \alpha e_1 + \beta e_2$.
Pour déterminer p il suffit donc de calculer α et β en fonction de x , y, z et t.
Or $\{v = (x, y, z, t) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4\} \Longleftrightarrow \{(x, y, z, t) = \alpha(1, 1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 2, 1) + \gamma(1, -1, 0, 1) + \delta(0, -1, 1, -2)\}$, soit $\begin{cases} x = \alpha - \beta + \gamma \\ y = \alpha - \gamma - \delta \\ z = \alpha + 2\beta + \delta \\ t = \beta + \gamma - 2\delta \end{cases}$,

d'où $\begin{cases} \gamma = x - \alpha + \beta \\ \delta = z - \alpha - 2\beta \\ 3\alpha + \beta = x + y + z \\ \alpha + 6\beta = -x + 2z + t \end{cases}$ et $\alpha = \frac{1}{17}(7x + 6y + 4z - t)$ et $\beta = \frac{1}{17}(-4x - y + 5z + 3t)$.
On en déduit alors que
$p(x, y, z, t) = \frac{1}{17}(7x + 6y + 4z - t)e_1 + \frac{1}{17}(-4x - y + 5z + 3t)e_2$

$p(x, y, z, t) = (\frac{11x+7y-z-4t}{17}, \frac{7x+6y+4z-t}{17} \frac{-x+4y+14z+5t}{17}, \frac{-4x-y+5z+3t}{17})$

(c) D'après le cours $w = p(v)$, donc $w = (\frac{14}{17}, -\frac{12}{17}, \frac{8}{17}, \frac{1}{17})$.

12. Notons p la projection orthogonale sur F, d'après le cours, $w = p(X)$ (ici on note aussi $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de même on notera $e = (1, 1, \ldots, 1)$).
Si $X = V_1 + V_2$ avec $V_1 \in F$ et $V_2 \in F^\perp$, $p(X) = V_1$.
Et puisque $F =< e >$, $V_1 = ke$, $k \in \mathbb{R}$.
Et si $X = ke + V_2$, $X.e = k\|e\|^2$ (en effet $e.V_2 = 0$ puisque $V_2 \in < e >^\perp$).

Or $X.e = x_1 + x_2 + \ldots x_n$ et $\|e\|^2 = n$. Donc $k = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \overline{X}$. Et

$$w = p(X) = \overline{X}e = (\overline{X}, \overline{X}, \ldots, \overline{X}).$$

13. (a) $\{v = (x, y, z) \in F_1\} \Longleftrightarrow \{v = (x, y, 2x+y, -2x-y) = x(1, 0, 2, -2) + y(0, 1, 1, -1)\}$. F_1 est donc engendré par $v_1 = (1, 0, 2, -2)$ et $v_2 = (0, 1, 1, -1)$. Ces deux vecteurs étant libres (non proportionnels) forment une base de F_1 et $\dim F_1 = 2$.

    (b) Notons $v_3 = (1, 1, 0, 0)$ et $v_4 = (0, 1, 1, 0)$. $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = -3 \neq 0$. Donc $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^4$, il existe α, β, γ, et δ, uniques tels que $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$. Or $V_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 \in F_1$ et $V_2 = \gamma v_3 + \delta v_4 \in F_2$.
    Cette décomposition est unique, d'où

    $$F_1 \bigoplus F_2 = \mathbb{R}^4.$$

    Remarque : On peut ausi vérifier que $F_1 \bigcap F_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$ mais c'est long.

    (c)
    $$p \circ p(x, y, z, t) = p(p(x, y, z, t)) = p(\frac{1}{3}(x - y + z), -\frac{2}{3}(x - y + z) - t, -t, t),$$

    $$\begin{aligned} p \circ p(x, y, z, t) = \tfrac{1}{3}(&\tfrac{1}{3}(x - y + z) + \tfrac{2}{3}(x - y + z) + t - t, \\ &-\tfrac{2}{3}(x - y + z) - \tfrac{4}{3}(x - y + z) - 2t + 2t - 3t, -3t, 3t), \end{aligned}$$

    $$p \circ p(x, y, z, t) = p(x, y, z, t),$$

    et p est bien un projecteur.
    D'après le cours p est une projection sur $\Im mp$ parallèlement à $\ker p$ et $\Im mp \bigoplus \ker p = \mathbb{R}^4$. Il suffit donc de montrer que $\Im mp = F_1$ et $\ker p = F_2$.
    $p(v_1) = p(1, 0, 2, -2) = (1, 0, 2, -2) = v_1$ donc $v_1 \in \Im mp$
    $p(v_2) = p(0, 1, 1, -1) = (0, 1, 1, -1) = v_2$ donc $v_2 \in \Im mp$
    $p(v_3) = p(1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$ donc $v_3 \in \ker p$
    $p(v_4) = p(0, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$ donc $v_4 \in \ker p$.
    On en déduit donc que $F_1 \subset \Im mp$ et $F_2 \subset \ker p$. Or $\dim F_1 = \dim F_2 = 2$ et les inclusions ne peuvent pas être strictes sinon on aurait $\dim \Im mp + \dim \ker p > 4$ et c'est incompatible avec $\Im mp \bigoplus \ker p = \mathbb{R}^4$.
    On a bien $\Im mp = F_1$ et $\ker p = F_2$.

14. (a) i. $u_1.u_2 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ donc $u_1 \perp u_2$
    $u_1.u_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ donc $u_1 \perp u_3$
    $u_1.u_4 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc $u_1 \perp u_4$
    $u_2.u_3 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc $u_2 \perp u_3$
    $u_2.u_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ donc $u_2 \perp u_4$
    $u_3.u_4 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ donc $u_3 \perp u_4$.
    b contient 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$, non nuls et deux à deux orthogonaux (c'est un système libre d'après le cours), c'est bien une base orthogonale.

ii. $\|u_1\| = \sqrt{4} = 2 = \|u_2\| = \|u_3\| = \|u_4\|$.
Les vecteurs colonnes de A sont donc normés et deux à deux ortogonaux, A est donc orthogonale.

iii. Puisque A est orthogonale, $A^{-1} = {}^tA = A$, car A est symétrique.

(b) Notons $v_1 = (2,1,0,1)$ et $v_2 = (1,0,1,0)$ les deux vecteurs qui engendrent E_1, ils sont libres (non proportionnels) et forment une base de E_1, $\dim E_1 = 2$.

Notons $v_3 = (1,-2,-1,0)$ et $v_4 = (0,-1,0,1)$ les deux vecteurs qui engendrent E_2, ils sont libres (non proportionnels) et forment une base de E_2, $\dim E_2 = 2$.

$v_1.v_3 = 2-2 = 0$ et $v_1.v_4 = -1+1 = 0$. Donc v_1 est orthogonal à E_2.

$v_2.v_3 = 1-1 = 0$ et $v_2.v_4 = 0$. Donc v_2 est orthogonal à E_2.

D'après le cours $E_1 \perp E_2$.

Ici le plus simple est de travailler dans la base $\mathbf{c} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Si v a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{c}$, $p(v) = p(xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4) = xp(v_1) + yp(v_2) + zp(v_3) + tp(v_4) = xv_1 + yv_2$ et la matrice de p dans la base $\mathbf{c}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15. (a) Si on reprend l'exercice **10** F a pour base $(1,0,-1)$ et $((0,1,2)$, avec les notations du cours, dans la base canonique $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, ${}^tX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et ${}^tXX = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. D'après la formule donnée : $({}^tXX)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Et si P est la matrice de p dans la base canonique :

$$P = X({}^tXX)^{-1}({}^tX) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Si on reprend l'exercice **11** F a pour base $(1,1,1,0)$ et $((-1,0,2,1)$, avec les notations du cours, dans la base canonique $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tXX = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. D'après la formule donnée : $({}^tXX)^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Et si P est la matrice de p dans la base canonique :

$$P = X({}^tXX)^{-1}({}^tX) = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 11 & 7 & -1 & -4 \\ 7 & 6 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 14 & 5 \\ -4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Si on reprend l'exercice **14** F a pour base $(2,1,0,-1)$ et $((1,0,1,0)$, avec les notations du cours, dans la base canonique $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

${}^tXX = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la formule donnée : $({}^tXX)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Et si P est la matrice de p dans la base canonique :

$$P = X({}^tXX)^{-1}({}^tX) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

16. (a) $\{v = (x,y,z) \in \ker f\} \Longleftrightarrow \{f(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$\{v = (x,y,z) \in \ker f\} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - 12y - 12z = 0 \\ y = 0 \\ x - 6y - 3z = 0 \end{cases}$. Soit $\begin{cases} x = 3z \\ y = 0 \end{cases}$ et

$\{v = (x,y,z) \in \ker f\} \Longleftrightarrow \{v = (3z,0,z) = z(3,0,1)\}$.

Donc $\ker f =< (3,0,1) >$ et $\dim \ker f = 1$. Notons $u_1 = (3,0,1)$.

$\Im mf$ est engendré par les vecteurs colonnes de M : $\Im mf =< (4,0,1), (-12,1,-6), (-12,0,-3) >$.

Or ces trois derniers vecteurs sont liés car leur déterminant est nul (c'est prévisible car par le théorème des dimensions $\dim \Im mf = \dim \mathbb{R}^3 - \dim\ker f = 2$). $u_2 = (4,0,1)$ et $u_3 = (-12,1,-6)$ sont libres (non proportionnels) et forment une base de $\Im mf$.

(b) f étant une application linéaire, f sera un projecteur dès que $f \circ f = f$.

La matrice de $f \circ f$ dans la base canonique est

$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix} = M.$

D'où la résultat.

(c) D'après le cours f est une projection sur $\Im mf$ parallèlement à $\ker f$. Donc $E_1 = \Im mf$ et $E_2 = \ker f$.

(d) $\mathcal{B}_1 = \{u_1\}$, $\mathcal{B}_2 = \{u_2, u_3\}$ et $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$.

$f(u_1) = (0,0,0)$, $f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = u_3$, f a donc pour matrice dans $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Soit $F^\perp$ l'orthogonal de F.

$\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ est une base orthonormée de F, notons $\mathcal{B}_2$ une base orthonormée de $F^\perp$. Puisque $F \bigoplus F^\perp = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_2$ contient $n - r$ vecteurs. Notons $\mathcal{B}_2 = \{u_{r+1}, \ldots, u_n\}$.

D'autre part puisque $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont orthonormées et que F et $F^\perp$ sont orthogonaux, $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

$$V = x_1u_1 + \ldots x_ru_r + x_{r+1}u_{r+1} + \ldots + x_nu_n.$$

Or $V_1 = x_1u_1 + \ldots x_ru_r \in F$ et $V_2 = x_{r+1}u_{r+1} + \ldots + x_nu_n \in F^\perp$, donc si Z est la projection orthogonale de V sur F, $Z = V_1 = x_1u_1 + \ldots x_ru_r = \sum_{i=1}^r x_iu_i$. Et

$$\|Z\|^2 = \sum_{i=1}^r x_i^2 \quad (1)$$

puisque $\mathcal{B}_1$ est orthonormée.

Or d'après le cours (propriété **5**) $x_i = V.u_i$. En effet $V.u_i = (x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_n).u_i$ et puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormée $u_j.u_i = 0$ si $j \neq i$ et 1 si $i = j$, donc en utilisant la linéarité du produit scalaire, on obtient bien $V.u_i = x_i$ et (1) s'écrit bien

$$\|Z\|^2 = \sum_{i=1}^r (V.u_i)^2.$$