Leçon 03 - Exercices

Exercice 1 - Soit F_1 le sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,1,0)$ $v_2 = (-1,0,1)$ et $w = (4,1,-2)$.

1) Déterminer une base et la dimension de F_1. Ecrire la forme générale d'un vecteur de F_1.

2) Soit $F_2 = \{(0,a+b,-b)\ ,\ a\in \mathbf{R} \text{ et } b\in \mathbf{R}\ \}$. Montrer que F_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ dont on donnera la dimension et une base.

3) Donner une base et la dimension de $F_1 \cap F_2$ et F_1+F_2. La somme F_1+F_2 est-elle directe?

Exercice 2 - Soit F_1 et F_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ engendrés respectivement par les familles $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$ où :

$u_1 = (1,0,4,2)$, $u_2 = (1,2,3,1)$ et $u_3 = (1,-2,5,3)$

$v_1 = (4,2,0,1)$ et $v_2 = (1,4,2,1)$

1) Déterminer la dimension et une base des espaces F_1 et F_2.

2) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

3 - Déterminer l'application linéaire qui projette $\mathbf{R}^3$ dans le plan engendré par $V_1 = (-1,0,1)$ et $V_2 = (0,1,0)$ parallèlement à $Y = (1,0,1)$.

Exercice 4 - Déterminer le produit scalaire de V_1 et V_2 ainsi que $\|V_1\|$ et $\|V_2\|$ dans les cas suivants :

1) $V1 = (-1,\sqrt{3},1,-2)$ et $V_2 = (1,2,3,\sqrt{3})$

2) $V1 = (1,-2,-1)$ et $V_2 = (1,\sqrt{2},-\sqrt{2})$

Exercice 5 - On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants : $v_1 = (1,-1,1)$ et $v_2 = (-1,0,1)$.

1) Démontrer que ces vecteurs sont orthogonaux. Sont-ils dépendants ?

2) Déterminer un vecteur v_3 tel que $\{v_1,v_2,v_3\}$ soit une base orthogonale de $\mathbf{R}^3$ puis exprimer $w = (1,0,0)$ dans cette base.

Exercice 6 - Soient $v = (1,0,-1)$ et F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ orthogonal à v (c'est à dire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v). Quelle est la dimension de F ? Déterminer F.

Exercice 7 - Soit $v_1 = (1,-1,1,1)$ et $v_2 = (0,1,0,1)$. Montrer que v_1 et v_2 sont orthogonaux et déterminer le sous-espace vectoriel orthogonal au sous espace vectoriel engendré par v_1 et v_2.

Exercice 8 - Soit $v_1 = (1/2, \sqrt{2}/4, 3/4, -1/4)$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}^4$ contenant v_1.

Exercice 9 - Montrer que $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Exercice 10 – Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ x - 2y + z = 0\}$.

1) Donner une base de F.
2) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ orthogonal à F.

3) Déterminer la projection orthogonale p sur F (c'est à dire la projection sur F parallèlement au sous espace orthogonal à F) sans utiliser le dernier résultat du cours (on demande d'exprimer $p(v) = p(x,y,z)$ en fonction des coordonnées x, y et z d'un vecteur v quelconque de $\mathbf{R}^3$).
4) Donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, sans utiliser le dernier résultat du cours.
5) Soit $v = (-1,0,-1)$. Trouver le vecteur w de F qui approxime le mieux v, au sens où $\|v - w\|$ est minimale.

Exercice 11 – 1) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ orthogonal à F tel que :

$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ ; \ x = y-t \text{ et } z = y+2t\}$.

2) Déterminer la projection orthogonale sur F correspondante sans utiliser le dernier résultat du cours.
3) Soit $v = (1,2,-1,3)$. Trouver le vecteur w de F qui approxime le mieux v, au sens où $\|v - w\|$ est minimale.

Exercice 12 - On se place dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa base canonique.

Soit $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur w de $F = \langle e \rangle$ qui approxime le mieux X, au sens où $\|X - w\|$ est minimale.

Exercice 13 - Soit F_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par :
$\{(x,y,z,t) \ ; \ 2x + y = z \text{ et } z + t = 0\}$.
1) Donner une base de F_1 puis sa dimension.
2) Soit $F_2 = \langle (1,1,0,0) , (0,1,1,0) \rangle$. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

3) Soit $p(x,y,z,t) = \left(\frac{x - y + z}{3}, \frac{-2x + 2y - 2z -3t}{3}, -t, t\right)$. Montrer que p est un projecteur.
Montrer que p est la projection sur F_1 parallèlement à F_2.
(On n'utilisera pas le dernier résultat du cours).

Exercice 14 - Soient $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,-1,1)$, $u_3 = (1,-1,1,-1)$ et $u_4 = (1,1,-1,-1)$.

1) a)Montrer que **b** = $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}^4$.

b) Calculer la norme de chacun des vecteurs de **b** et en déduire que A est orthogonale.

c) Calculer A^{-1}.

2) Soit E_1 le sous-espace vectoriel engendré par (2,1,0,1) et (1,0,1,0) (E_1 est en fait le sous-espace propre de A relatif à la valeur propre 1) et E_2 le sous-espace vectoriel engendré par (1,-2,-1,0) et (0,-1,0,1) (E_2 est le sous-espace propre de A relatif à la valeur propre -1). E_1 et E_2 sont-ils orthogonaux ?
Expliciter, dans une base que l'on précisera et que l'on choisira la plus simple possible, la projection de p sur E_1 parallèlement à E_2 (on demande p(v) en fonction des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de v (vecteur quelconque de $\mathbf{R}^4$) dans la base choisie et la matrice de p dans cette base sans utiliser le dernier résultat du cours).

Exercice 15 – Reprendre les exercices **10**, **11** et **14** et déterminer les matrices des projections dans la base canonique en utilisant le dernier résultat du cours.
On rappelle que si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det P \neq 0$, $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 16 – Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ dans la base canonique.

1. Déterminer une base de kerf et une base de Imf.

2. Montrer que f est un projecteur.

3. Déterminer E_1 et E_2 tels que f soit une projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

4. Soit B_1 et B_2 des bases respectives de E_1 et E_2. Donner la matrice de f dans $B_1 \cup B_2$.

Exercice 17 - Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ admettant une base orthonormée

$\mathbf{B_1} = \{u_1 , u_2 , \ldots, u_r\}$ (bien sûr $r \leq n$). Montrer que si Z est la projection orthogonale de V sur F alors $\|Z\|^2 = \sum_{j=1}^{r} < V , u_i >^2$.

Indication : Construire une base orthonormée de $\mathbf{R^n}$ contenant $\mathbf{B_1}$ et une base orthonormée $\mathbf{B_2}$ de $F^{\perp}$.