Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 9 :
1. Soit $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y - z = 0\}$. Donner la matrice P_{F1} de la projection orthogonale sur F_1 dans la base canonique en utilisant la proposition précédente.
N.B : On rappelle que si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\text{dét}P \neq 0$, $P^{-1} = \frac{1}{\text{dét}P}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
2. Soit v = (1,0,2). Quelle est la meilleure approximation de v par un vecteur de F_1.

Solution

1. On a déjà vu que $\mathbf{B}_1 = \{ e_1 , e_2\} = \{ (1,0,1) , (0,1,1)\}$ est une base de F_1. Donc en utilisant les notations de la proposition **7** du cours :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{P_{F1}} = X({}^tXX)^{-1}({}^tX) .$$

$${}^tXX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ et d'après la formule rappelée en N.B.

$$({}^tXX)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{P_{F1}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. D'après le cours le vecteur de F_1 cherché est $w = p_{F1}(v)$ si p_{F1} désigne la projection orthogonale sur F_1. Et w a pour coordonnées dans la base canonique

$$\mathbf{P_{F1}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}. \ w = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$