Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 8 : Soit $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (1,1,-2)$.
1. Montrer que $\{v_1 , v_2 , v_3\}$ est un système de vecteurs orthogonaux deux à deux.
2. En déduire une base orthonormée **B** de vecteurs colinéaires à v_1, v_2 et v_3.
3. Donner la matrice de passage de la base canonique **C** vers **B**.
4. Soit V = (5,-1,4) et W = (2,3,-1). Donner les coordonnées de V et W dans les bases **C** et **B**.
5. Calculer $\|V\|^2$ et V.W dans **C** et **B**. Que constate-t-on ? Expliquer pourquoi ?

Solution

1. $v_1 . v_2 = 1 - 1 + 0 = 0$
$v_1 . v_3 = 1 + 1 - 2 = 0$
$v_2 . v_3 = 1 - 1 + 0 = 0$
Les 3 vecteurs sont donc bien deux à deux orthogonaux. Et puisqu'ils sont non nuls ils forment un système libre. C'est donc une base orthogonale de $\mathbf{R}^3$.

2. Pour obtenir une base orthonormée à partir de la base orthogonale précédente il suffit de normer chaque vecteur :
$\|v_1\| = \sqrt{3}$, $\|v_2\| = \sqrt{2}$ et $\|v_3\| = \sqrt{6}$
$\mathbf{B} = \{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\}$ soit
$\mathbf{B} = \{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})\}$.

3. La matrice de passage de **C** vers **B** est :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

4. Dans **C**, V a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et W a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dans **B**, V a pour coordonnées $P^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Or puisque P est la matrice de passage d'une base orthonormée vers une autre, P est orthogonale et $P^{-1} = {}^tP$.

Donc V a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ dans **B**.

De même W a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{7}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

dans **B**.

5. Calculs dans **C** :
$||V||^2 = 25 + 1 + 16 = 42$
$V \,.\, W = 10 - 3 - 4 = 3$

Calculs dans **B** :
$||V||^2 = \frac{64}{3} + \frac{36}{2} + \frac{16}{6} = \frac{252}{6} = 42$
$V \,.\, W = \frac{32}{3} - \frac{6}{2} - \frac{28}{6} = \frac{18}{6} = 3$
Les résultats sont évidement identiques dans les deux bases. C'est le résultat de la propriété **5** du cours. Il est donc avantageux dans ce cadre de faire les calculs dans la base où les coordonnées sont les plus simples.