Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 7 :
Soit F le sous-espace engendré par $u_1 = (1,0,1)$. Déterminer $F^\perp$. Soit p la projection orthogonale sur F, calculer p(x,y,z).

Solution

D'après le cours $F^\perp$ est de dimension 2. Une base de $F^\perp$ est donc formée de deux vecteurs indépendants et orthogonaux à u_1.
Trivialement $u_2 = (0,1,0)$ est orthogonal à u_1. (x,y,z) est orthogonal à u_1 si et seulement si $x + z = 0$. $u_3 = (1,0,-1)$ convient et est indépendant de u_2.
Une base de $F^\perp$ est donc $\{u_2 , u_3\}$.

Calculons p(x,y,z).
Si v= (x,y,z) et si $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F$ et $v_2 \in F^\perp$, $p(x,y,z) = v_1$. Or $v_1 = au_1$ puisque $\{u_1\}$ est une base de F. De même $v_2 = bu_2 + cu_3$.
Il faut calculer a en fonction de x, y et z.
$v = (x,y,z) = a(1,0,1) + b(0,1,0) + c(1,0,-1) = (a+c,b,a-c)$. D'où
$\begin{cases} x = a + c \\ y = b \\ z = a - c \end{cases}$. On en déduit $a = \frac{1}{2}(x + z)$ et en remplaçant a par sa valeur dans v_1, on obtient
$p(x,y,z) = \frac{1}{2}(x + z)\,(1,0,1) = \left(\frac{x + z}{2}, 0, \frac{x + z}{2}\right)$.

N.B : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de v dans la base $\{u_1 , u_2 , u_3\}$.