Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 4 : Soit $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ; x + y - z = 0\}$ et F_2 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par $f_1 = (1,1,1)$. Montrer que $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (0,1,1)$ forment une base de F_1 et que F_1 et F_2 sont supplémentaires.
Soit p la projection sur F_1 parallèlement à F_2. Calculer $p(x,y,z)$ et donner la matrice de p dans la base canonique. Soit q la projection sur F_2 parallèlement à F_1. Calculer astucieusement $q(x,y,z)$ et donner la matrice de q dans la base canonique.
Donner les matrices de p et q dans $\{e_1, e_2, f_1\}$.

Solution

La première partie a été montrée dans les "Exercez-vous" précédents.
Calculons $p(x,y,z)$.
Si $v = (x,y,z)$ et si $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$, $p(x,y,z) = v_1$.
Or $v_1 = ae_1 + be_2$ puisque $\mathbf{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ est une base de F_1. De même $v_2 = cf_1$.
Il s'agit de calculer a et b en fonction des coordonnées x,y et z de v.
$v = (x,y,z) = a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(1,1,1) = (a+c,b+c,a+b+c)$. D'où
$\begin{cases} x = a + c \\ y = b + c \\ z = a + b + c \end{cases}$. On en déduit $\begin{cases} x + y - z = c \\ -y + z = a \\ -x + z = b \end{cases}$ et en remplaçant a et b par leur valeur dans v_1, on obtient $p(x,y,z) = v_1 = (-y+z)(1,0,1) + (-x+z)(0,1,1)$,
$p(x,y,z) = (-y+z , -x + z , -x-y+2z)$.

On en déduit la matrice de p dans la base canonique : $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

N.B : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de v dans la base $\{e_1 , e_2 , f_1\}$.

On sait que $p + q = Id$. Donc $p(x,y,z) + q(x,y,z) = (x,y,z)$. D'où
$q(x,yz) = (x+y-z , x+y-z , x+y-z)$.

N.B. : On aurait aussi pu remarquer que $q(v) = v_2 = cf_1 = (x+y-z)(1,1,1)$.

La matrice de q est $Q = I_3 - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans la base $\{e_1 , e_2 , f_1\}$ les matrices de p et q sont particulièrement simples.

En effet $p(e_1) = e_1$, $p(e_2) = e_2$ et $p(f_1) = (0,0,0)$ et la matrice de p dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De même $q(e_1) = (0,0,0)$, $q(e_2) = (0,0,0)$ et $q(f_1) = f_1$ d'où la matrice de q dans cette base

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$