

Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 3 : On reprend les sous-espaces de l'"exercez-vous 1", trouver un supplémentaire de F_1 et un supplémentaire de F_2 .

Solution

En reprenant les notations de la solution de l'"Exercez-vous 1", $\mathbf{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ est une base de F_1 . Si nous complétons cette base en une base de \mathbf{R}^3 nous aurons une base d'un supplémentaire de F_1 .

Par exemple si $f_1 = (1,1,1)$, $\det(e_1, e_2, f_1) = -1 \neq 0$ et $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, f_1\}$ est une base de \mathbf{R}^3 et le sous espace vectoriel $F_3 = \langle f_1 \rangle$, engendré par f_1 , est un supplémentaire de F_1 .

De même en complétant \mathbf{B}_2 on obtiendra une base d'un supplémentaire de F_2 .

$f_2 = (1,0,0)$ convient (en effet $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$).

Ainsi le sous-espace vectoriel $F_4 = \langle f_2 \rangle$, engendré par f_2 , est un supplémentaire de F_2 . Par contre F_3 n'est pas un supplémentaire de F_2 , en effet $f_1 \in F_2$.