Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 1 :
Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces de R^3 définis par :
$F_1 = \{(x,y,z) \in R^3 \,;\, x + y – z = 0\}$
$F_2 = \{(x,y,z) \in R^3 \,;\, 2x - y – z = 0\}$
1) Trouver une base de F_1 et une base de F_2.
2) Déterminer $F_1 + F_2$.

Solution

1) $v = (x,y,z) \in F_1$ si et seulement si $v = (x,y,x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$.
Donc $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (0,1,1)$ forment un système générateur de F_1. Ces deux vecteurs sont libres (car non proportionnels) ils forment donc une base $\mathbf{B}_1$ de F_1.

$v = (x,y,z) \in F_2$ si et seulement si $v = (x,y,2x-y) = x(1,0,2) + y(0,1,-1)$.
Donc $e_3 = (1,0,2)$ et $e_4 = (0,1,-1)$ forment un système générateur de F_2. Ces deux vecteurs sont libres (car non proportionnels) ils forment donc une base $\mathbf{B}_2$ de F_2.

2) $v = (x,y,z)\ ) \in (F_1 + F_2)$ si $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$.
$v_1 \in F_1$ donc $v_1 = ae_1 + be_2$ avec a et b réels,
$v_2 \in F_2$ donc $v_2 = ce_3 + de_4$ avec c et d réels et
$v = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ et $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est un système générateur de $F_1 + F_2$.
Ce système n'est sûrement pas une base car dans $\mathbf{R}^3$ car un système libre a au plus 3 vecteurs.
Or $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre car $\text{dét}(e_1, e_2, e_3) = 1 \neq 0$, c'est donc une base de
$F_1 + F_2$ et $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension 3 c'est donc $\mathbf{R}^3$.
$F_1 + F_2 = \mathbf{R}^3$