

Leçon 03 – Correction des "Avez-vous compris?"

Avez-vous compris ? 8

On souhaite construire une base orthonormée de \mathbf{R}^3 contenant un vecteur proportionnel à $V_1 = (0,1,1)$.

1. Trouver un vecteur V_2 orthogonal à V_1 .
2. Trouver un vecteur V_3 orthogonal à V_1 et V_2 .
3. Que peut-on dire de $\{V_1, V_2, V_3\}$? Répondre au problème posé.

Solution

1. $V_2 = (1,0,0)$ convient.

2. $V_3 = (x,y,z)$ est orthogonal à V_1 et V_2 si et seulement si
$$\begin{cases} V_3 \cdot V_1 = 0 \\ V_3 \cdot V_2 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. Donc $V_3 = (0,1,-1)$ convient.

3. $\{V_1, V_2, V_3\}$ est une base orthogonale de \mathbf{R}^3 mais elle n'est pas orthonormée. Pour obtenir une base orthonormée il faut normer chaque vecteur. On obtient alors :

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); (1,0,0); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right); (1,0,0); \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$$