Leçon 03 – Correction des "Avez-vous compris?"

Avez-vous compris ? 5 : Démontrez que si un vecteur X est orthogonal à Y_1, Y_2, …, Y_p, X est orthogonal à toute combinaison linéaire de Y_1, Y_2, et, Y_p et donc à tout vecteur du sous-espace vectoriel engendré par Y_1, Y_2, …, Y_p, noté $< Y_1, Y_2, \ldots, Y_p >$.

Solution

Soit $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_p Y_p$ une combinaison linéaire quelconque des Y_i (i = 1 à p) et X un vecteur orthogonal à Y_1, Y_2 …et Y_p. Par la linéarité du produit scalaire on a
$X.(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_p Y_p) = \lambda_1(X.Y_1) + \lambda_2(X.Y_2) + \ldots + \lambda_p(X.Y_p) = 0$ puisque chaque produit scalaire est nul X étant orthogonal à Y_1, Y_2 …et Y_p. Le résultat s'en déduit puisque $< Y_1, Y_2, \ldots, Y_p >$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaire des Y_i (i = 1 à p).