Leçon 03 – Correction des "Avez-vous compris?"

Avez-vous compris ? 3 : Démontrez la proposition **2** pour p :

Proposition 2 : p et q sont des applications linéaires de **E** et kerp = F_2, kerq = F_1, Imp = F_1 et Imq = F_2. De plus $p \circ p = p$ (on note parfois p^2 au lieu de $p \circ p$) , $q \circ q = q$ (ou $q^2 = q$) et p + q = Id (fonction identité qui à v fait correspondre lui-même).

Solution

- F_1 et F_2 sont en somme directe et si $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$, $p(v) = v_1$.

De même si $w = w_1 + w_2$ avec $w_1 \in F_1$ et $w_2 \in F_2$, $p(w) = w_1$ et puisque v + w peut s'écrire $v + w = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2)$. F_1 et F_2 étant des sous-espaces vectoriels $(v_1 + w_1) \in F_1$ et $(v_2 + w_2) \in F_2$. La décomposition sur la somme directe étant unique on a donc $\underline{p(v + w) = v_1 + w_1 = p(v) + p(w)}$.

D'autre part $\lambda v = \lambda v_1 + \lambda v_2$, F_1 et F_2 étant des sous-espaces vectoriels $\lambda v_1 \in F_1$ et $\lambda v_2 \in F_2$. La décomposition sur la somme directe étant unique on a donc $\underline{p(\lambda v) = \lambda v_1 = \lambda p(v)}$.

p est bien une **application linéaire**.

- $v \in \ker p$ si et seulement si $p(v) = 0$, soit $v_1 = 0$ et $v = v_2 \in F_2$.
  D'où $\boxed{\ker p = F_2}$.

- D'autre part $p(v) = v_1 \in F_1$, donc $\underline{\mathrm{Im} p \subset F_1}$. Et si $v_1 \in F_1$ $p(v_1) = v_1 \in \mathrm{Im} p$ donc $\underline{F_1 \subset \mathrm{Im} p}$. Et on a bien $\boxed{\mathrm{Im} p = F_1}$.

- De plus $v = v_1 + v_2$ et $p(v) = v_1$ et $q(v) = v_2$. On peut donc écrire

Id(v) = v = p(v) + q(v) , c'est-à-dire $\boxed{p + q = Id}$.