Leçon 03 - Cours : Somme de sous-espaces vectoriels - Produit scalaire - Projections

Objectif: Ce cours est un outil et un pré requis pour les leçons 4 et 6. Il aborde la notion de somme directe de sous espaces vectoriels (important pour la notion de réduction de matrices, diagonalisation et forme réduite de Jordan). Nous introduisons aussi la notion d'orthogonalité (généralisation de celle qui a été vue en lycée) et de projection. Ces deux notions trouvent leur application en Statistiques et y sont très utilisées.

Dans tout ce chapitre on considère un espace vectoriel **E** de dimension finie n sur **R** ou **C**. On peut donc considérer que $\mathbf{E} = \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{E} = \mathbf{C}^n$.

Ce chapitre est très dense, les démonstrations et les énoncés en petits caractères peuvent être éventuellement laissés de côté bien qu'ils permettent une meilleure compréhension du cours. Par contre

les encadrés roses

et les définitions

sont à savoir.

1. Somme de sous-espaces vectoriels – somme ditrecte – sous-espaces supplémentaires

1.1. Somme de sous-espaces

Définition 1 : Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de **E**. L'ensemble de tous les vecteurs v de la forme $v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$ est un sous espace vectoriel F de **E**. Ce sous-espace F est appelé **somme des sous-espaces-vectoriels** F_1 *et* F_2 et on note :

$$F = F_1 + F_2$$

On montre que F est le plus petit sous-espace contenant $F_1 \cup F_2$.

Exemple : Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ définis par :
$F_1 = \{(x,y,0,0) ; x \in \mathbf{R} \text{ et } y \in \mathbf{R}\}$ et $F_2 = \{(0,z,t,0) ; z \in \mathbf{R} \text{ et } t \in \mathbf{R}\}$.
Déterminons $F = F_1+F_2$.
Par définition, $v \in F$ si et seulement si $v = (x,y,0,0) + (0,z,t,0) = (x,y+z,t,0)$ avec x, y, z et t réels quelconques. Donc $F = \{(x,y',t,0) , x \in \mathbf{R} , y' \in \mathbf{R} \text{ et } t \in \mathbf{R}\}$ (on a posé y' = z+t et si z et t prennent toutes les valeurs réelles possibles, y' aussi).
Remarquons que F admet pour base $\{e_1 = (1,0,0,0) ; e_2 = (0,1,0,0) , e_3 = (0,0,1,0)\}$ et est de dimension 3.

1.2. Somme directe

Définition 2 : On dit que $F = F_1 + F_2$ est **une somme directe** si la décomposition de tout vecteur v de F sous la forme $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$ est **unique**.

On note alors $F = F_1 \oplus F_2$.

On note $\mathbf{0} = (0,0,\dots,0)$ le vecteur nul de **E**.

Théorème 1 *: La somme* $F = F_1+ F_2$ *est directe si et seulement si*

$$F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

Démonstration : • Supposons que la somme $F = F_1 \oplus F_2$ soit directe.
Si $v \in F_1 \cap F_2$, $\frac{v}{2}$ appartient à la fois à F_1 et F_2 puisque ce sont des sous-espaces vectoriels, et

$v = \frac{v}{2} + \frac{v}{2} = v + \mathbf{0}$. $v \in F$ et si $v \neq \mathbf{0}$, v a deux décompositions différentes sur $F_1 \oplus F_2$, ce qui contredit le fait que la somme est directe. Donc nécessairement $v = \mathbf{0}$ et $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$.
• Réciproquement supposons que $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$.
Si v admet deux décompositions sur $F_1+ F_2$, $v = v_1+v_2 = v'_1+v'_2$, alors $v_1-v'_1 = v_2-v'_2$.
Or v_1 et v'_1 appartiennent à F_1 donc $v_1-v'_1 \in F_1$. De même $v_2-v'_2 \in F_2$.
Donc $v_1-v'_1= v_2-v'_2 \in F_1 \cap F_2$ et $v_1-v'_1 = v_2-v'_2 = \mathbf{0}$. D'où l'unicité de la décomposition et $F = F_1 \oplus F_2$.

Exemple : Si on reprend l'exemple précédent, la somme n'est pas directe puisque $F_1 \cap F_2 = \{(0,y',0,0) ; y' \in \mathbf{R}\} \neq \{(0,0,0,0)\}$.
D'autre part, par exemple $(1,1,1,0) = (1,1,0,0) + (0,0,1,0) = (1,0,0,0) + (0,1,1,0)$ et la décomposition n'est pas unique sur F_1+F_2.
Par contre si maintenant, on considère F_1 et $F'_2 = \{(0,0,z,t) ; z \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}$, on vérifie aisément que la somme est directe et on a même $\mathbf{R}^4 = F_1 \oplus F'_2$.

Ce qui nous amène à la définition suivante :

Définition 3 : Deux sous-espaces vectoriels de **E** sont dits supplémentaires si et seulement si $\mathbf{E} = F_1 \oplus F_2$.

Dans la pratique pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, on montre d'abord que $\mathbf{E} = F_1+F_2$ puis que $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$. Parfois il peut être plus rapide de montrer que **tout** vecteur de **E** se compose de **façon unique** en la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.

Notons aussi qu'un sous-espace vectoriel F_1 peut avoir des supplémentaires différents dans **E**.

D'autre part la définition de somme directe se généralise naturellement à 3, 4 , …, p sous-espaces vectoriels de **E**. Mais le théorème **1** devient

Proposition 1 (peut être sautée): Si $F_1, F_2, \ldots F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de **E**, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i)la somme $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est directe.

(ii)$\forall i = 1, 2, \ldots, p, \ F_i \cap (\sum_{j \neq i} F_j) = \{\mathbf{0}\}$

(iii)$\forall i = 1, 2, \ldots, p-1 , \ (\sum_{j=1}^{i} F_j) \cap F_{i+1} = \{\mathbf{0}\}$.

***Attention**, les conditions (ii) et (iii) sont beaucoup plus fortes que la condition $F_1 \cap F_2 \ldots \cap F_p = \{\mathbf{0}\}$ ou même que la condition $\forall i \neq j \ F_i \cap F_j = \{\mathbf{0}\}$.

Dimension d'une somme directe : $\boxed{\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim F_1 + \dim F_2}$

Si $\mathbf{B}_1$ est une base de F_1 et si $\mathbf{B}_2$ est une base de F_2, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$ est une base de $F_1 \oplus F_2$.

En effet si $v \in F$, $v = v_1 + v_2$ se décompose de façon unique sur F_1 et F_2. Or v_1(resp. v_2) se décompose de façon unique sur $\mathbf{B}_1$ (resp. $\mathbf{B}_2$). La décomposition de v sur **B** est donc unique. D'où le résultat puisque $\dim F_1 = \mathrm{card}(\mathbf{B}_1)$, $\dim F_2 = \mathrm{card}(\mathbf{B}_2)$ et $\dim F = \mathrm{card}(\mathbf{B}) = \mathrm{card}(\mathbf{B}_1) + \mathrm{card}(\mathbf{B}_2)$ (on a évidement $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2 = \emptyset$ puisque $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$).

On peut aussi remarquer que :

1. L'égalité des dimensions précédente se généralise à la somme directe de plus de 2 sous-espaces. La base d'une somme directe est la réunion des bases des sous-espaces vectoriels qui constituent la somme directe.

2. Si $F = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4$ par exemple, et si Σ_1 est un système libre de F_1, Σ_2 un système libre de F_2, Σ_3 un système libre de F_3 et Σ_4 un système libre de F_4 , $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ est un système libre de F.

Conséquence *:* Ainsi si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4$ par exemple, il est intéressant de retenir que si $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$, $v_3 \in F_3$ et $v_4 \in F_4$ sont 4 vecteurs non nuls, ils sont indépendants.

1.3. Projecteurs

Soit F_1 et F_2 deux sous espaces supplémentaires de **E**. Donc pour tout $v \in \mathbf{E}$, il existe $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$ tels que $v = v_1 + v_2$ et cette décomposition est **unique**.

On peut donc définir deux applications p et q telles que :

$p : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, $v \to p(v) = v_1$

$q : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, $v \to q(v) = v_2$

Définition 4 : L'application p (resp. q) s'appelle la *projection sur F_1 (resp. F_2) parallèlement à F_2 (resp. F_1).*

Proposition 2 *: p et q sont des applications linéaires de* **E** *et kerp = F_2, kerq = F_1, Imp = F_1 et Imq = F_2. De plus $p\circ p = p$ (on note parfois p^2 au lieu de $p\circ p$), $q\circ q = q$ (ou $q^2 = q$) et p + q = Id (fonction identité qui à v fait correspondre lui-même).*

Définition 5 et: On appelle projecteur de **E**, toute application linéaire p de **E** dans **E** vérifiant $p^2 = p$.

Proposition 3 *: Le projecteur p est alors la projection sur Imp parallèlement à kerp.*

Démonstration : Montrons d'abord que Imp et kerp sont des supplémentaires de **E**.

Soit $v \in \mathbf{E}$**,** on peut écrire $v = (v-p(v)) + p(v)$. Or évidement $p(v) \in$ Imp et d'autre part $p(v-p(v)) = p(v) - p^2(v) = \mathbf{0}$ puisque $p^2 = p$. Donc $(v-p(v)) \in$ kerp et on a montré que **E** = kerp + Imp.

Pour montrer que la somme est directe, il reste à prouver que kerp$\cap$Imp = $\{\mathbf{0}\}$.

Soit $v \in$ kerp$\cap$Imp. $v \in$ Kerp donc $p(v) = \mathbf{0}$, d'autre part $v \in$ Imp donc v peut s'écrire $v = p(v_0)$. Or $\mathbf{0} = p(v) = p^2(v_0) = p(v_0) = v$ puisque $p^2 = p$. D'où $v = \mathbf{0}$ et la somme est bien directe.

La décomposition de tout vecteur v de **E** sur kerp et Imp est donc unique et de la forme : $v = (v-p(v)) + p(v)$ et p se présente bien comme étant la projection sur Imp parallèlement à kerp ($v_1 = p(v)$ et $v_2 = v-p(v)$).

2. Produit Scalaire

A partir de ce paragraphe, on considère $\mathbf{E} = \mathbf{R}^n$.

2.1. Définitions et premières propriétés

Définition 6 : On appelle **produit scalaire** des vecteurs $X = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $Y = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ de $\mathbf{R}^n$, l'expression : $X \,.\, Y = \langle X,Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

On en déduit alors immédiatement les propriétés suivantes :

***Propriétés 1** : **1-** Le produit scalaire est une forme bilinéaire (= est à valeurs réelles et est linéaire par rapport à chacun de ses arguments X et Y). Autrement dit :*

$$X.Y \in \mathbf{R}$$
$$\langle(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2),Y\rangle = \lambda_1\langle X_1,Y\rangle + \lambda_2\langle X_2,Y\rangle$$
$$X.(\lambda_1Y_1+\lambda_2Y_2) = \lambda_1 X.Y_1 + \lambda_2X.Y_2$$

***2-** $\langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle$ (Commutativité)*

***3-** $X.X \geq 0$*

***4-** $X.X = 0$ si et seulement si $X = (0,0,\dots,0)$ (noté **0**).*

Définition 7 : Deux vecteurs X et Y sont **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire est nul. On note : $(X \perp Y) \Leftrightarrow (X.Y = 0)$

***Proposition 4** : Si $S = \{X_1 , \dots , X_p\}$ est un système de vecteurs non nuls et orthogonaux deux à deux , S est **libre**.*

Démonstration : Soit $\lambda_1X_1 + \dots + \lambda_pX_p$ une combinaison linéaire quelconque des vecteurs de S. Supposons que $\lambda_1X_1 + \dots + \lambda_pX_p = \mathbf{0}$.
Donc pour tout i = 1, … p : $0 = X_i.(\lambda_1X_1 + \dots + \lambda_pX_p) = \lambda_i X_i . X_i$.
Or $X_i \neq \mathbf{0}$ par hypothèse et d'après la propriété **3**, $X_i . X_i \neq 0$. D'où $\lambda_i = 0$.
Ainsi tous les λ_i sont nuls et S est bien libre.

Définition 8 : Un vecteur X est **orthogonal à un sous espace vectoriel** F de $\mathbf{R}^n$ si et seulement si X est orthogonal à tout vecteur de F.

D'après le résultat de " Avez-vous compris **5** " on a :

Propriété 2 : *X est orthogonal à F si et seulement si X est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F.*

Définition 9 : Deux sous espaces vectoriels F_1 et F_2 de $\mathbf{R}^n$ sont des **sous-espaces vectoriels orthogonaux** si et seulement si tout vecteur de F_1 est orthogonal à tout vecteur de F_2.

On a la caractérisation suivante de deux espaces vectoriels orthogonaux.

Propriété 3 *: Deux sous espaces vectoriels de* $\boldsymbol{R}^n$ *sont orthogonaux si et seulement si tous les vecteurs d'une base de l'un est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de l'autre.*

Démonstration : La condition est évidemment nécessaire, étant donné la définition. Montrons qu'elle est suffisante :
Soit $\mathbf{B}_1 = \{e_1, \dots, e_p\}$ et $\mathbf{B}_2 = \{f_1, \dots, f_q\}$ deux bases de F_1 et F_2 telles que tout vecteur de $\mathbf{B}_1$ soit orthogonal à tout vecteur de $\mathbf{B}_2$.
Soit V_1 et V_2 des vecteurs quelconques de F_1 et F_2.
$V_1 \in F_1$ donc $V_1 = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, $V_2 \in F_2$ donc $V_2 = \sum_{j=1}^{q} y_j f_j$. D'où :
$V_1.V_2 = (\sum_{i=1}^{p} x_i e_i).(\sum_{j=1}^{q} y_j f_j)$.
Et puisque le produit scalaire est une forme bilinéaire :
$V_1.V_2 = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} x_i y_j (e_i.f_j)$ or par hypothèse pour tout i et pour tout j, $e_i.f_j = 0$ et donc $V_1.V_2 = 0$.

Théorème 2 *: La somme de deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de* $\boldsymbol{R}^n$ *est une somme directe.*

Démonstration : Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathbf{R}^n$ et soit $v \in F_1 \cap F_2$.
Puisque $v \in F_1$ et $v \in F_2$ et $F_1 \perp F_2$, donc $v \perp v$ et $\langle v,v \rangle = 0$.
D'après la propriété **1** 4., $v = \mathbf{0}$ et la somme de F_1 et F_2 est directe.

Conséquence : Si $\mathbf{R}^n$ est la somme de 2 sous-espaces vectoriels orthogonaux, ces sous espaces sont supplémentaires.

Définitions 10 et proposition 5 : Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ orthogonaux à F s'appelle **l'orthogonal de F** et se note $F^\perp$. C'est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F: $\mathbf{R}^n = F \oplus F^\perp$.
La **projection orthogonale sur F** est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel et que la somme est directe ne présente pas de difficulté. La seule difficulté ici consiste à prouver que $\mathbf{R}^n = F + F^\perp$. Nous admettrons le résultat (la démonstration utilise ce qui suit).

2.2. Ecriture matricielle

Si X est la matrice colonne des coordonnées de X dans la base canonique et Y celle de

$$Y : \boxed{X.Y = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^t X\, Y}$$

vecteur X *matrice colonne Y*

(${}^t A$ désignant la matrice transposée de A, c'est à dire celle qui est obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes).

2.3. Bases orthonormées de R^n

Définitions 11 : **1-** On appelle **norme euclidienne** d'un vecteur de **E**, l'expression $\sqrt{X \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, notée $\|X\|$.

2- Une **base orthonormée** de **E** est une base formée de vecteurs deux à deux orthogonaux et de norme 1 (on dit aussi **normés** ou **unitaires**).

Propriétés 4 *:*

1) $v = 0 \Leftrightarrow \| v \| = 0$.

2) $\| \lambda v \| = | \lambda | \, \|v\|$.

3) Si $v \neq 0$, $\dfrac{v}{\|v\|}$ *est un vecteur unitaire proportionnel à v.*

4) Théorème de Pythagore : Si $v \perp w$, $\| v + w \|^2 = \| v \|^2 + \| w \|^2$.

Les propriétés **4-1)** à **4-3)** sont immédiates (à démontrer en exercices).
La propriété **4-3)** peut être très utile pour les exercices.

Démontrons 4-4) :
Etant donné la définition de la norme et les propriétés de linéarité du produit scalaire :
$\| v + w \|^2 = \langle v + w , v + w \rangle = \langle v , v \rangle + \langle v , w \rangle + \langle w , v \rangle + \langle w , w \rangle$;
et $\| v + w \|^2 = \| v \|^2 + \| w \|^2$ (en effet, v et w étant orthogonaux, $\langle v , w \rangle = 0$).

Remarque : La base canonique est une base orthonormée mais ce n'est pas la seule et on a même le théorème suivant :

Théorème 3 *: A partir de p vecteurs de* $\mathbf{R}^n$ $(1 \leq p < n)$ *de norme 1 et orthogonaux deux à deux, il est toujours possible de construire une base orthonormée de* $\mathbf{R}^n$ *contenant ces vecteurs.*

***Propriété 5**: Si $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée **B** = $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ quelconque,*

$X \,.\, Y = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\| X \|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $a_i = X \,.\, u_i$

En effet,

$<X , Y> = <\sum_{i=1}^{n} a_i u_i , \sum_{j=1}^{n} b_j u_j> = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j <u_i , u_j> = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ puisque **B** est orthonormée et donc que $<u_i , u_j> = 0$ si $i \neq j$ et $<u_i , u_i> = 1$.

D'autre part $<X , u_i> = <\sum_{j=1}^{n} a_j u_j , u_i> = \sum_{j=1}^{n} a_j <u_j , u_i> = a_i$.

Ce résultat simple montre la commodité de telles bases. Et quand ce sera possible, on tachera de se ramener à des bases orthonormées (la base canonique l'est et c'est la plus simple!). D'autre part les matrices de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée ont des propriétés très intéressantes comme nous allons le voir ci-après.

2.4. Matrices orthogonales

Définition 12 : Une matrice est appelée **matrice orthogonale** si c'est la matrice de passage d'une base orthonormée vers une autre base orthonormée.

***Propriétés 6** : **1** - (M est orthogonale) $\Leftrightarrow$ ($^tM = M^{-1}$)*
***2** - Si M est orthogonale détM = 1 ou -1*
***3** - Si M et N sont orthogonales alors MN l'est aussi.*

Attention : Les réciproques de **2** et **3** sont fausses.

Démonstration : Si M est orthogonale les vecteurs colonnes V_i de M sont unitaires et deux à deux orthogonaux. Or si $^tMM = (a_{ij})$,
$a_{ij} = {}^tV_iV_j$ donc $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$. D'où $^tMM = I_n$ (matrice identité d'ordre n) et $^tM = M^{-1}$.

Réciproquement si $^tM = M^{-1}$, les vecteurs colonnes V_i de M vérifient $^tV_iV_j = 0$ si $i \neq j$ et $^tV_iV_i = 1$, ils forment donc une base orthonormée et M est orthogonale.

D'autre part, puisque dét^tM = détM, $1 = \text{dét}I_n = \text{dét}(^tM.M) = \text{dét}(^tM.)\text{dét}M = (\text{dét}M)^2$ d'après ce qui précède. D'où dét(M) = 1 ou -1.

De plus si M et N sont orthogonales, $^t(MN) = {}^tN{}^tM = N^{-1}M^{-1} = (MN)^{-1}$ et MN est orthogonale.

Le paragraphe suivant est très utile pour les Statistiques et l'Econométrie.

2.5. Orthogonalité et projections

Théorème 4 : *F est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^n$ *et p la projection orthogonale sur F. Soit v un vecteur donné de* $\mathbf{R}^n$*, parmi tous les vecteurs* $w \in F$*, seul p(v) réalise le minimum de* $\| v - w \|$ *:*

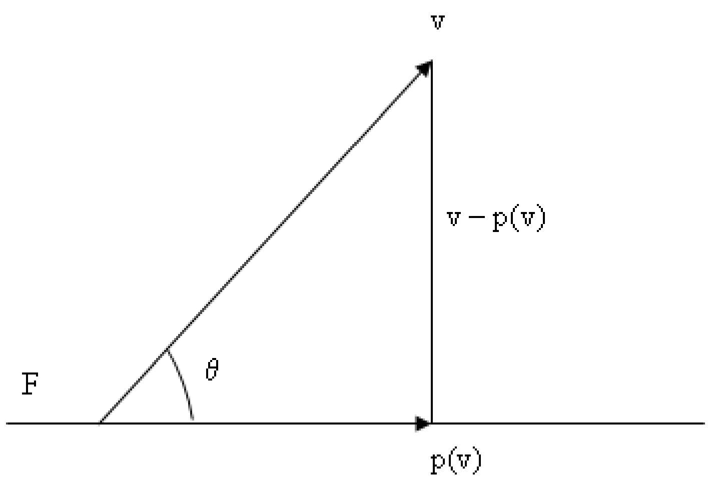
$$\min_{w \in F} \| v - w \| = \| v - p(v) \|$$

Autrement dit si l'on considère la fonction définie dans F et qui à tout vecteur $w \in F$ fait correspondre $\|v - w\|$, sa distance à v, cette fonction atteint son minimum en p(v). Cela peut s'interpréter en disant que p(v) est le vecteur de F "le plus proche" de v. On peut aussi dire que

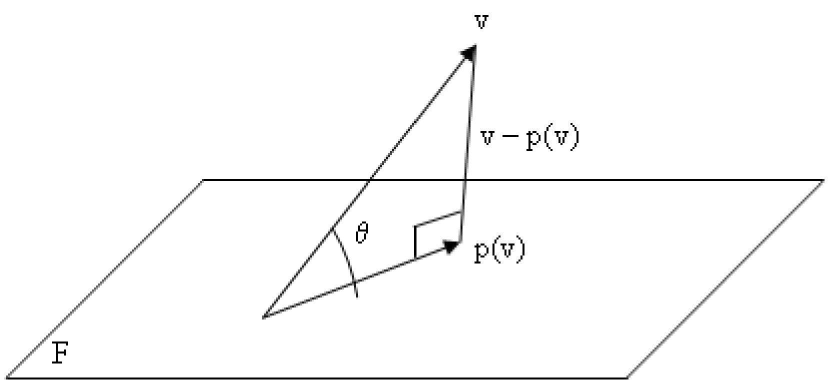
*la "**meilleure approximation**" de v par un vecteur de F est* $\hat{v} = p(v)$ *; "meilleure approximation" voulant dire que* $\hat{v} - v$ *(erreur faite en remplaçant v par* $\hat{v}$*) est de norme minimum.*

Démonstration : Par définition de p,
$v = p(v) + (v - p(v))$ avec $p(v) \in F$ et $(v - p(v)) \in F^{\perp}$.
$\forall w \in F$, $\| v - w \|^2 = \| v - p(v) + p(v) - w \|^2$. Or $(v - p(v)) \in F^{\perp}$ et $(p(v) - w) \in F$, ce sont donc des vecteurs orthogonaux et d'après le théorème de Pythagore :
$\| v - w \|^2 = \| v - p(v) \|^2 + \| p(v) - w \|^2$. v est donné et $w \in F$, donc $\| v - w \|^2$ est minimum pour $\| p(v) - w \|^2 = 0$, soit $w = p(v)$.

Dans $\mathbf{R}^2$



Dans $\mathbf{R}^3$



D'après le théorème de Pythagore, v - p(v) (vecteur de $F^{\perp}$) et p(v) (vecteur de F) étant orthogonaux,
$\| v \|^2 = \| v - p(v) + p(v) \|^2 = \| v - p(v) \|^2 + \| p(v) \|^2$.
D'où $1 = \dfrac{\| v - p(v) \|^2}{\| v \|^2} + \dfrac{\| p(v) \|^2}{\| v \|^2}$ et si $R^2 = \dfrac{\| p(v) \|^2}{\| v \|^2}$, $0 \leq R^2 \leq 1$.
Si on se reporte aux dessins précédents, $R^2 = \cos^2\theta$.

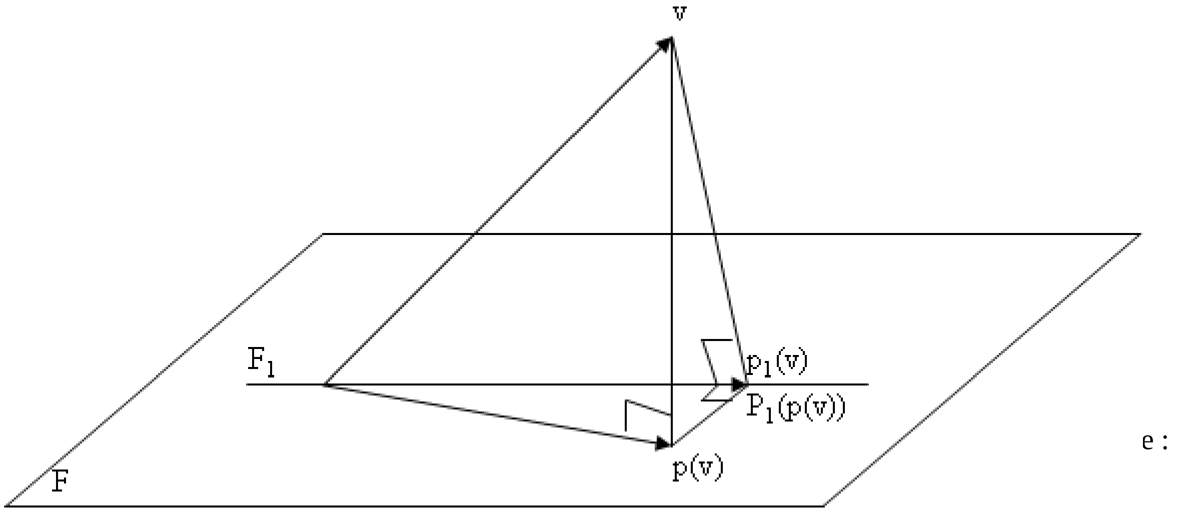
Et plus $R^2 = \dfrac{\| p(v) \|^2}{\| v \|^2} = \cos^2(v,p(v))$ est proche de 1, plus $\| v - p(v) \|^2$ est proche de 0 et meilleure est l'approximation de v par p(v).

En économétrie, on a aussi besoin du résultat suivant :

Théorème 5 (ou théorème des 3 perpendiculaires) : Soient F et F_1 des sous-espaces vectoriels tels que F_1 soit inclus dans F ($F_1 \subset F$). Si p (respectivement p_1) est la projection orthogonale sur F (respectivement sur F_1), on a : $\forall v \in \mathbf{R}^n \quad p_1(v) = p_1(p(v))$.

Autrement dit, dans la mesure où $F_1 \subset F$, projeter orthogonalement sur F puis sur F_1, revient à projeter orthogonalement directement sur F_1.

On a dans $\mathbf{R}^3$, le dessin suivant (ici F_1 est une droite incluse dans le plan F) :



Proposition 6 : Si F et F_1 sont deux sous-espaces vectoriels tels que $F_1 \subset F$ alors $F^{\perp} \subset F_1^{\perp}$.

Démonstration de la proposition : Si $v \in F^{\perp}$ et $w \in F_1$ alors $w \in F$ (car $F_1 \subset F$) et $w \perp v$, donc $v \in F_1^{\perp}$. On a donc bien $F^{\perp} \subset F_1^{\perp}$.

Démontrons alors le théorème.

$v = p(v) + (v - p(v))$ avec $p(v) \in F$ et $(v - p(v)) \in F^{\perp}$. Or d'après la proposition précédente, $F^{\perp} \subset F_1^{\perp}$ donc $(v - p(v)) \in F_1^{\perp}$.

D'autre part, en projetant p(v) sur F_1 :
$p(v) = p_1(p(v)) + (p(v) - p_1(p(v)))$ avec $p_1(p(v)) \in F_1$ et $(p(v) - p_1(p(v))) \in F_1^{\perp}$. En remplaçant dans la première égalité on a :

$v = [\ p_1(p(v)) + (p(v) - p_1(p(v)))\ ] + (v - p(v))$
$v = p_1(p(v)) + [\ (p(v) - p_1(p(v))) + (v - p(v))\ ]$ (1)
avec $[\ (p(v) - p_1(p(v))) + (v - p(v))\ ] \in F_1^{\perp}$ (puisque c'est la somme de deux vecteurs de $F_1^{\perp}$ qui est un sous-espace vectoriel) et par définition $p_1(p(v))$ appartient à F_1.
De plus, la projection de v sur F_1 donne : $v = p_1(v) + (v - p_1(v))$ (2).
Or la décomposition de v sur F_1 et $F_1^{\perp}$ est unique ($\mathbf{R}^n$ est somme directe de F_1 et $F_1^{\perp}$). Donc en comparant (1) et (2), on obtient : $p_1(v) = p_1(p(v))$.

Voici un autre résultat **à savoir** et qui peut s'avérer **très utile** en Econométrie et en Statistiques. Nous ne le démontrerons pas car certaines notions du chapitre suivant sont nécessaires.

Proposition 7 : *Soit F un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^n$ *de base* $B_F = \{v_1, \dots, v_p\}$. *Notons X la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de* B_F *dans une base B. Alors la matrice de la projection orthogonale sur F dans B est :* $X({}^tXX)^{-1}({}^tX)$.

Exercices

Exercice 1 - Soit F_1 le sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,1,0)$ $v_2 = (-1,0,1)$ et $w = (4,1,-2)$.

1) Déterminer une base et la dimension de F_1. Ecrire la forme générale d'un vecteur de F_1.

2) Soit $F_2 = \{(0,a+b,-b)\ ,\ a\in \mathbf{R} \text{ et } b\in \mathbf{R}\}$. Montrer que F_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ dont on donnera la dimension et une base.

3) Donner une base et la dimension de $F_1\cap F_2$ et F_1+F_2. La somme F_1+F_2 est-elle directe?

Exercice 2 - Soit F_1 et F_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ engendrés respectivement par les familles $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$ où :

$u_1 = (1,0,4,2)$, $u_2 = (1,2,3,1)$ et $u_3 = (1,-2,5,3)$

$v_1 = (4,2,0,1)$ et $v_2 = (1,4,2,1)$

1) Déterminer la dimension et une base des espaces F_1 et F_2.

2) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

3 - Déterminer l'application linéaire qui projette $\mathbf{R}^3$ dans le plan engendré par $V_1 = (-1,0,1)$ et $V_2 = (0,1,0)$ parallèlement à $Y = (1,0,1)$.

Exercice 4 - Déterminer le produit scalaire de V_1 et V_2 ainsi que $\|V_1\|$ et $\|V_2\|$ dans les cas suivants :

1) $V1 = (-1,\sqrt{3},1,-2)$ et $V_2 = (1,2,3,\sqrt{3})$

2) $V1 = (1,-2,-1)$ et $V_2 = (1,\sqrt{2},-\sqrt{2})$

Exercice 5 - On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants : $v_1 = (1,-1,1)$ et $v_2 = (-1,0,1)$.

1) Démontrer que ces vecteurs sont orthogonaux. Sont-ils dépendants ?

2) Déterminer un vecteur v_3 tel que $\{v_1,v_2,v_3\}$ soit une base orthogonale de $\mathbf{R}^3$ puis exprimer $w = (1,0,0)$ dans cette base.

Exercice 6 - Soient $v = (1,0,-1)$ et F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ orthogonal à v (c'est à dire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v). Quelle est la dimension de F ? Déterminer F.

Exercice 7 - Soit $v_1 = (1,-1,1,1)$ et $v_2 = (0,1,0,1)$. Montrer que v_1 et v_2 sont orthogonaux et déterminer le sous-espace vectoriel orthogonal au sous espace vectoriel engendré par v_1 et v_2.

Exercice 8 - Soit $v_1 = (1/2,\sqrt{2}/4,3/4,-1/4)$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}^4$ contenant v_1.

Exercice 9 - Montrer que $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Exercice 10 – Soit $F = \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \ ; \ x - 2y + z = 0\}$.

1) Donner une base de F.
2) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ orthogonal à F.

3) Déterminer la projection orthogonale p sur F (c'est à dire la projection sur F parallèlement au sous espace orthogonal à F) sans utiliser le dernier résultat du cours (on demande d'exprimer $p(v) = p(x,y,z)$ en fonction des coordonnées x, y et z d'un vecteur v quelconque de $\mathbf{R}^3$).
4) Donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, sans utiliser le dernier résultat du cours.
5) Soit $v = (-1,0,-1)$. Trouver le vecteur w de F qui approxime le mieux v, au sens où $\|v - w\|$ est minimale.

Exercice 11 – 1) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ orthogonal à F tel que :

$F = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 \ ; \ x = y-t \text{ et } z = y+2t\}$.

2) Déterminer la projection orthogonale sur F correspondante sans utiliser le dernier résultat du cours.
3) Soit $v = (1,2,-1,3)$. Trouver le vecteur w de F qui approxime le mieux v, au sens où $\|v - w\|$ est minimale.

Exercice 12 - On se place dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa base canonique.

Soit $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur w de $F = < e >$ qui

approxime le mieux X, au sens où $\|X - w\|$ est minimale.

Exercice 13 - Soit F_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par :
$\{(x,y,z,t) \ ; \ 2x + y = z \text{ et } z + t = 0\}$.
1) Donner une base de F_1 puis sa dimension.
2) Soit $F_2 = < (1,1,0,0) , (0,1,1,0) >$. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.
3) Soit $p(x,y,z,t) = \left(\frac{x - y + z}{3} , \frac{-2x + 2y - 2z -3t}{3} , -t , t\right)$. Montrer que p est un projecteur.
Montrer que p est la projection sur F_1 parallèlement à F_2.
(On n'utilisera pas le dernier résultat du cours).

Exercice 14 - Soient $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,-1,1)$, $u_3 = (1,-1,1,-1)$ et $u_4 = (1,1,-1,-1)$.

1) a)Montrer que $\mathbf{b} = \{u_1 , u_2 , u_3 , u_4\}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}^4$.

b) Calculer la norme de chacun des vecteurs de **b** et en déduire que A est orthogonale.

c) Calculer A^{-1}.

2) Soit E_1 le sous-espace vectoriel engendré par (2,1,0,1) et (1,0,1,0) (E_1 est en fait le sous-espace propre de A relatif à la valeur propre 1) et E_2 le sous-espace vectoriel engendré par (1,-2,-1,0) et (0,-1,0,1) (E_2 est le sous-espace propre de A relatif à la valeur propre -1). E_1 et E_2 sont-ils orthogonaux ?

Expliciter, dans une base que l'on précisera et que l'on choisira la plus simple possible, la projection de p sur E_1 parallèlement à E_2 (on demande p(v) en fonction des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de v (vecteur quelconque de $\mathbf{R}^4$) dans la base choisie et la matrice de p dans cette base sans utiliser le dernier résultat du cours).

Exercice 15 – Reprendre les exercices **10**, **11** et **14** et déterminer les matrices des projections dans la base canonique en utilisant le dernier résultat du cours.

On rappelle que si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\text{dét}P \neq 0$, $P^{-1} = \frac{1}{\text{dét}P}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 16 – Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ dans la base canonique.

1. Déterminer une base de kerf et une base de Imf.

2. Montrer que f est un projecteur.

3. Déterminer E_1 et E_2 tels que f soit une projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

4. Soit B_1 et B_2 des bases respectives de E_1 et E_2. Donner la matrice de f dans $B_1 \cup B_2$.

Exercice 17 - Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ admettant une base orthonormée $\mathbf{B_1} = \{u_1 , u_2 , \ldots, u_r\}$ (bien sûr $r \leq n$). Montrer que si Z est la projection orthogonale de V sur F alors $||Z||^2 = \sum_{j=1}^{r} < V , u_i >^2$.

Indication : Construire une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ contenant $\mathbf{B_1}$ et une base orthonormée $\mathbf{B_2}$ de $F^{\perp}$.