Leçon 02 : Exercices

Exercice 1 - Calculer les déterminants des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A + B$, AB , A^2 , B^2 et $(A+B)^2$.

Exercice 2 - Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 8 \\ 7 & 9 & 2 & 4 \\ 2.37 & 5.19 & 6.52 & 1.84 \end{vmatrix}$

Exercice 3 - Calculer de déterminant $D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

Exercice 4 - Calculer $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$

Exercice 5 - On considère les 3 déterminants définis par $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a+2 \\ a & 2a+2 \end{vmatrix}$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 \\ a & 2a+2 & 3a+6 \\ a & 3a+2 & 6a+8 \end{vmatrix}$ $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 & a+6 \\ a & 2a+2 & 3a+6 & 4a+12 \\ a & 3a+2 & 6a+8 & 10a+20 \\ a & 4a+2 & 10a+10 & 20a+30 \end{vmatrix}$ avec $a \in \mathbf{R}$. Montrer que Δ_4 s'exprime simplement en fonction de Δ_3 et Δ_3 en fonction de Δ_2. En déduire l'expression de Δ_4 en fonction de a.

Exercice 6 - Calculer le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$.

Exercice 7 - Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$

Exercice 8 - Calculer le déterminant d'ordre n : $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$

Exercice 9 - Calculer le déterminant d'ordre n+1 : $D_2 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$

Exercice 10 - Calculer le déterminant d'ordre n : $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & \dots & C_k^{n-1} \\ 1 & C_{k+1}^1 & C_{k+1}^2 & \dots & C_{k+1}^{n-1} \\ 1 & C_{k+2}^1 & C_{k+2}^2 & \dots & C_{k+2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{k+n-1}^1 & C_{k+n-1}^2 & \dots & C_{k+n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$

(On rappelle que $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$)

Exercice 11 - Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 10 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

Exercice 12 - Résoudre : $\begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ 2x - 6y + z = 11 \\ 4x + 9y - 7z = 38 \end{cases}$

Exercice 13 - Résoudre le système (S) suivant les valeurs du réel λ : (S) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$

Exercice 14 - Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 13 \\ x + 2y + 3z + 4t = 26 \\ 4x - y + 2z + 6t = 18 \\ -x + 4y + 5z - 3t = 24 \end{cases}$

Exercice 15 - Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 5y + 6z + 7t = 9 \\ 5x + 6y + 7z + 4t = 11 \\ 6x + 7y + 4z + 5t = 13 \\ 7x + 4y + 5z + 6t = 11 \end{cases}$

Exercice 16 - Soit $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x+1 & 1 & -1 \\ 1-x & 1-x & 1 & -1 \\ 0 & 0 & x-4 & x \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. Montrer sans calculer D(x) que D(x) s'annule pour 3 valeurs de x distinctes. Calculer D(x).

Exercice 17 - Résoudre : $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ 3x + y + mz = 2 \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 18 - Résoudre : $\begin{cases} (4-m)x + 7y - z = -1 \\ -3x + (-6-m)y + z = 1 \\ -3x - 4y + (-1-m)z = 1 \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre m.