L3 économie appliquée
Aunège
Université Paris-sud
0dile Brandière

Correction des exercices de la leçon 2 : Déterminants et applications

1. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$

   $\det B = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -20$

   $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 63 = -60$

   $\det(AB) = \det A \times \det B = 200$

   $\det(A^2) = (\det A)^2 = 100$

   $\det(B^2) = (\det B)^2 = 400$

   $\det(A+B)^2 = (\det(A+B))^2 = 3600$

2. On remarque que la dernière ligne est une combinaison linéaire des 3 autres en effet : $L_4 = L_1 + 0.1L_2 + 0.01L_3$. Donc $\Delta = 0$.

3. $D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

   En faisant les transformations suivantes $C_1 \longrightarrow C_1$, $C_2 \longrightarrow C_2 - C_1$, $C_3 \longrightarrow C_3 - C_2$, $C_4 \longrightarrow C_4 - C_3$, on obtient

   $D = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b & 0 \\ a & b-a & c-b & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$ (déterminant d'une matrice triangulaire).

4. $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

En faisant les transformations suivantes : $L_1 \longrightarrow L_1$, $L_2 \longrightarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longrightarrow L_3 - L_1$, on obtient $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$. Et en développant suivant la première colonne :

$$D_2 = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$. En faisant les transformations suivantes,

$L_1 \longrightarrow L_1$, $L_2 \longrightarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longrightarrow L_3 - L_1$, $L_4 \longrightarrow L_4 - L_1$, on obtient

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$. En développant suivant la première colonne et en mettant en facteur $(b-a)$ dans la première ligne, $(c-a)$ dans la deuxième ligne et $(d-a)$ dans la troisième ligne, on obtient $D_3 = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ca+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$.

En faisant les transformations suivantes, $L_1 \longrightarrow L_1$, $L_2 \longrightarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longrightarrow L_3 - L_1$, on obtient $D_3 = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-b & c^2+ca-ab-b^2 \\ 0 & d-b & d^2+ad-ab-b^2 \end{vmatrix}$. En développant suivant la première colonne et en mettant en facteur $(c-b)$ dans la première ligne et $(d-b)$ dans la deuxième ligne, on obtient $D_3 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 1 & a+b+d \end{vmatrix}$ et

$D_3 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

5. Dans Δ_4, si on fait les transformations suivantes,

$L_4 \longrightarrow L_4 - L_3$, $L_3 \longrightarrow L_3 - L_2$, $L_2 \longrightarrow L_2 - L_1$, $L_1 \longrightarrow L_1$, on obtient

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 & a+6 \\ 0 & a & 2a+2 & 3a+6 \\ 0 & a & 3a+2 & 6a+8 \\ 0 & a & 4a+2 & 10a+10 \end{vmatrix}$. En développant suivant la première colonne

$\Delta_4 = a\begin{vmatrix} a & 2a+2 & 3a+6 \\ a & 3a+2 & 6a+8 \\ a & 4a+2 & 10a+10 \end{vmatrix}$. Si on fait les transformations suivantes,

$C_3 \longrightarrow C_3 - C_2$, $C_2 \longrightarrow C_2 - C_1$, $C_1 \longrightarrow C_1$, on obtient $\Delta_4 = a\begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 \\ a & 2a+2 & 3a+6 \\ a & 3a+2 & 6a+8 \end{vmatrix}$.

D'où $\Delta_4 = a\Delta_3$.

Dans Δ_3, si on fait les transformations suivantes, $L_3 - L_2$, $L_2 \longrightarrow L_2 - L_1$, $L_1 \longrightarrow L_1$, on obtient $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 \\ 0 & a & 2a+2 \\ 0 & a & 3a+2 \end{vmatrix}$, et en développant suivant la première colonne, on a $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 2a+2 \\ a & 3a+2 \end{vmatrix}$. Si on fait les transformations suivantes, $C_1 \longrightarrow C_1$, $C_2 \longrightarrow C_2 - C_1$, on obtient $\Delta_3 = a\Delta_2$.

Or $\Delta_2 = a((2a+2) - a(a+2)) = a^2$. D'où $\Delta_3 = a^3$ et $\Delta_4 = a^4$.

6. Si on met a_1 en facteur dans la première ligne, a_2 dans la deuxième, …, a_n dans la dernière ligne, on obtient $\Delta = a_1 a_2 \ldots a_n \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & . & . & b_n \\ b_1 & b_2 & . & . & b_n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_1 & b_2 & . & . & b_n \end{vmatrix} = 0$ (les lignes sont égales).

7. Si on fait les transformatins suivantes,
$L_1 \longrightarrow L_1$, $L_2 \longrightarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longrightarrow L_3 - L_1$, $L_4 \longrightarrow L_4 - L_1$, on obtient
$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i-1 & -2 & -i-1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2i & 0 & 2i \end{vmatrix}$, et en développant suivant la deuxième colonne,
$\Delta = \begin{vmatrix} i-1 & -2 & -i-1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2i & 0 & 2i \end{vmatrix}$. En développant suivant la deuxième colonne,
$\Delta = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2i & 2i \end{vmatrix} = -16i$.

8. Si on fait les transformations suivantes, $L_n \longrightarrow L_n - L_{n-1}$, $L_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, …, $L_2 \longrightarrow L_2 - L_1$, $L_1 \longrightarrow L_1$, on obtient
$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & a_n \\ 0 & (a_1-a_2) & (a_2-a_3) & . & . & (a_{n-1}-a_n) \\ 0 & 0 & (a_1-a_2) & . & . & (a_{n-2}-a_{n-1}) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & (a_1-a_2) \end{vmatrix} = a_1(a_1-a_2)^{n-1}$$
(le déterminant est triangulaire).

9. En développant D_2 suivant la première colonne, on a
$$D_2 = a_n \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & x & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & x & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & . & . & a_0 \\ -1 & x & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & x & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Si $D_2 = \Delta_n$, le deuxième déterminant de la précédente égalité s'écrit Δ_{n-1}.

Ainsi $D_2 = \Delta_n = a_n x^n + \Delta_{n-1}$. En itérant la dernière relation de récurrence, on obtient $\Delta_{n-1} = a_{n-1}x^{n-1} + \Delta_{n-2}\ ,\ldots\ ,\ \Delta_2 = a_1 x + \Delta_1\ ,\ \Delta_1 = a_0$.

Donc $D_2 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

10. Si on fait les transformations suivantes,

$L_n \longrightarrow L_n - L_{n-1},\ L_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} - L_{n-2},\ \ldots,\ L_2 \longrightarrow L_2 - L_1,\ L_1 \longrightarrow L_1$, en utilisant la relation

$$C_n^p - C_{n-1}^p = C_{n-1}^{p-1}$$

(donc $C_{k+1}^1 - C_k^1 = C_k^0$, $C_{k+1}^2 - C_k^2 = C_k^1, \ldots$) on obtient

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & . & . & C_k^{n-1} \\ 0 & C_k^0 & C_k^1 & . & . & C_k^{n-2} \\ 0 & C_{k+1}^0 & C_{k+1}^1 & . & . & C_{k+1}^{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & C_{k+n-2}^0 & C_{k+n-2}^1 & . & . & C_{k+n-2}^{n-2} \end{vmatrix}$. En développant suivant la première colonne

et en utilisant $C_n^0 = 1$, on a $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 & . & . & C_k^{n-2} \\ 1 & C_{k+1}^1 & . & . & C_{k+1}^{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & C_{k+n-2}^1 & . & . & C_{k+n-2}^{n-2} \end{vmatrix}$. C'est le même déterminant que D_2, mais au rang inférieur $(n \to n-1)$.

En itérant on obtient $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 \\ 1 & C_{k+1}^1 \end{vmatrix} = C_k^1 - C_{k+1}^1 = C_k^0 = 1$.

11. En développant suivant la dernière ligne, $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

En développant le premier déterminant suivant la troisième ligne et le deuxième suivant la dernière :

$D = -4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 6(-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 6(-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

En développant chaque déterminant suivant leur dernière ligne :

$D = -4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 18 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -50$.

12. Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 129 \neq 0$. C'est donc un système de Cramer

qui admet une unique solution de la forme

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 11 & -6 & 1 \\ 38 & 9 & 7 \end{vmatrix}}{129} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 21 & 11 & 1 \\ 4 & 38 & 7 \end{vmatrix}}{129} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & -6 & 11 \\ 4 & 9 & 38 \end{vmatrix}}{129} b\ ,$$

$$x = \frac{323}{43} \ , \ y = \frac{79}{129} \quad , \quad z = -\frac{15}{43}.$$

13. $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$. Le déterminant du système est

$$D_\lambda = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

• Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$, le système est un système de Cramer qui a une solution unique donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)},$$

$$x = \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{1}{\lambda + 2} = y = z.$$

• Si $\lambda = 1$, ce n'est plus un système de Cramer et il y a une infinité de solution de la forme $\{((x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 1\}$.

• Si $\lambda = -2$, le système s'écrit $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \quad (1) \\ x - 2y + z = 1 \quad (2) \\ x + y - 2z = 1 \quad (3) \end{cases}$. (1) + (2) + (3) donne $0 = 3$ et le système n'a donc pas de solution.

14. Le déterminant du système est $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -10 & -10 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 7 \\ -9 & -10 & -10 \\ 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -371 \neq 0$. C'est donc un système de Cramer qui a une unique solution de la forme

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 & 1 \\ 26 & 2 & 3 & 4 \\ 18 & -1 & 2 & 6 \\ 24 & 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}}{-371} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 & -1 & 1 \\ 1 & 26 & 3 & 4 \\ 4 & 18 & 2 & 6 \\ -1 & 24 & 5 & -3 \end{vmatrix}}{-371} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 13 & 1 \\ 1 & 2 & 26 & 4 \\ 4 & -1 & 18 & 6 \\ -1 & 4 & 24 & -3 \end{vmatrix}}{-371}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \\ 4 & -1 & 2 & 18 \\ -1 & 4 & 5 & 24 \end{vmatrix}}{-371},$$

$$x = 1 \quad , \quad y = 4 \quad , \quad z = 3 \quad , \quad t = 2$$

15. Ici on observe une permutation circulaire des coefficients et en sommant les 4 équations on obtient : $x + y + z + t = 2$.

    D'autre part en soustrayant la quatrième équation de la deuxième, on obtient :

    $x - y - z + t = 0$.

    Soit $\begin{cases} (x+t) + (y+z) = 2 \\ (x+t) - (y+z) = 0 \end{cases}$ et $x + t = y + z = 1$.

    Donc $t = 1 - x$ et $z = 1 - y$ et le système s'écrit

    $\begin{cases} t = 1 - x \\ z = 1 - y \\ 3x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$. D'où les solutions : $x = 1 = y$ et $z = t = 0$.

16. $D(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (les deux premières lignes sont égales).

    $D(1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (les deux premières colonnes sont proportionnelles).

    $D(2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (les deux dernières colonnes sont opposées).

    En développant $D(x)$ suivant la première colonne,

    $D(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 0 & x-4 & x \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (x-1) \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 0 & x-4 & x \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

    $D(x) = (1-x)(4-2x) + (x-1)(x+1)(-(x-4) - x)$

    $D(x) = (1-x)(4-2x)(1-(x+1)) = 2x(x-1)(x-2)$

    (on retrouve que D s'annule en 0, 1 et 2).

17. $(I)\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=1 \\ x+my+z=1 \\ 3x+y+mz=2 \end{array}\right.$. Le déterminant de (I) est

$$D_m = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \\ 3+2m & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & m+1 & 1 \\ 3+2m & m+1 & m \end{vmatrix}$$

$$D_m = -\begin{vmatrix} 3 & m+1 \\ 3+2m & m+1 \end{vmatrix} = 2m(m+1).$$

• Si $m \neq 0$ et $m \neq -1$, $D_m \neq 0$ et (I) est un système de Cramer qui admet pour unique solution

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix}}{2m(m+1)} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix}}{2m(m+1)} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2m(m+1)},$$

$$x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2(m+1)} \quad z = \frac{1}{2(m+1)}.$$

• Si $m = 0$, (I) devient $\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=1 \\ x+z=1 \\ 3x+y=2 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=1 \\ z=1-x \\ y=2-3x \end{array}\right.$. Or si $z=1-x$ et $y=2-3x$, $2x+y-z=1$ est vérifiée et (I) s'écrit $\left\{\begin{array}{l} z=1-x \\ y=2-3x \end{array}\right.$.

Les solutions sont de la forme $\{(x, 2-3x, 1-x)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$, il y en a une infinité.

• Si $m = -1$, (I) devient $\left\{\begin{array}{ll} 2x+y-z=1 & (1) \\ x-y+z=1 & (2) \\ 3x+y-z=2 & (3) \end{array}\right.$

$(3)-(2)$ donne $x=1$ et $(1)+(2)$ donne $x=3/2$.

C'est impossible et (I) n'a pas de solution.

18. Si D_m est le déterminant du système $D_m = \begin{vmatrix} (4-m) & 7 & -1 \\ -3 & (-6-m) & 1 \\ -3 & -4 & (-1-m) \end{vmatrix}$

$D_m = -m^3 - m^2 + 4 = -(m-1)(m+2)^2$

• Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, $D_m \neq 0$ et le système est un système de Cramer qui admet pour unique solution

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 1 & (-6-m) & 1 \\ 1 & -4 & (-1-m) \end{vmatrix}}{-(m-1)(m+2)^2} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} (4-m) & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & (-1-m) \end{vmatrix}}{-(m-1)(m+2)^2} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} (4-m) & 7 & -1 \\ -3 & (-6-m) & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{-(m-1)(m+2)^2},$$

$$x = \frac{1}{m+2} \quad y = -\frac{1}{m+2} \quad z = -\frac{1}{m+2}.$$

• Si $m = 1$, le système devient $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 7y - z = -1 \\ -3x - 7y + z = 1 \\ -3x - 4y - 2z = 1 \end{array} \right.$, soit $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 7y - z = -1 \\ -3x - 4y - 2z = 1 \end{array} \right.$.

D'où $\left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = -3z - \frac{1}{3} \end{array} \right.$.

Le système a donc une infinité de solutions de la forme $\{(-3z - \frac{1}{3}, z, z)\ ,\ z \in \mathbb{R}\}$.

• Si $m = -2$, le système s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} 6x + 7y - z = -1 \\ -3x - 4y + z = 1 \\ -3x - 4y + z = 1 \end{array} \right.$, soit $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 7y - z = -1 \\ -3x - 4y + z = 1 \end{array} \right.$.

D'où $\left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ z = 1 + y \end{array} \right.$.

Le système a donc une infinité de solutions de la forme $\{(-y, y, 1 + y)\ ,\ y \in \mathbb{R}\}$.