

Leçon 02 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 1 :

$$\text{Soit } D_1 = \begin{vmatrix} 20 & (3x+y) & 0 \\ 10 & (x-y) & -3 \\ 20 & (-2x+3y) & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Montrer que } D_1 = -30 \begin{vmatrix} 2 & (3x+y) & 0 \\ 1 & (x-y) & 1 \\ 2 & (-2x+3y) & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Montrer que } D_1 = 30 \begin{vmatrix} 1 & (x-y) & 1 \\ 2 & (3x+y) & 0 \\ 2 & (-2x+3y) & 0 \end{vmatrix}. \text{ En déduire que } D = 0 \text{ si } 5x = 2y.$$

$$\text{Montrer que } D_1 = 30x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} + 30y \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Solution

$$1) D_1 = \begin{vmatrix} 20 & (3x+y) & 0 \\ 10 & (x-y) & -3 \\ 20 & (-2x+3y) & 0 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 2 & (3x+y) & 0 \\ 1 & (x-y) & -3 \\ 2 & (-2x+3y) & 0 \end{vmatrix} = -30 \begin{vmatrix} 2 & (3x+y) & 0 \\ 1 & (x-y) & 1 \\ 2 & (-2x+3y) & 0 \end{vmatrix}$$

(en mettant 10 en facteur dans la 1^{ière} colonne) (en mettant -3 en facteur dans la 3^{ème} colonne)

$$2) D_1 = -30 \begin{vmatrix} 2 & (3x+y) & 0 \\ 1 & (x-y) & 1 \\ 2 & (-2x+3y) & 0 \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 1 & (x-y) & 1 \\ 2 & (3x+y) & 0 \\ 2 & (-2x+3y) & 0 \end{vmatrix} \text{ en échangeant la première et la}$$

deuxième ligne (l'échange de 2 lignes ou 2 colonnes multiplie le déterminant par -1).

On remarque que le dernier déterminant est nul dès que ses deux dernières lignes sont égales. Pour que cette dernière condition soit réalisée il suffit que $3x + y = -2x + 3y$, soit que $5x = 2y$. D'où le résultat.

$$3) \begin{vmatrix} 1 & (x-y) & 1 \\ 2 & (3x+y) & 0 \\ 2 & (-2x+3y) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 3x & 0 \\ 2 & -2x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -y & 1 \\ 2 & y & 0 \\ 2 & 3y & 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

(en décomposant la 2^{ème} colonne en 2) (en mettant x en facteur dans la 2^{ème} colonne) (en mettant y en facteur dans la 2^{ème} colonne).

En utilisant la question précédente, on en déduit que

$$D_1 = 30x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} + 30y \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$