Leçon 02 - Cours : Déterminants et applications

Objectif: On a vu dans le cours de L2 combien il est important de savoir si une matrice est inversible, si des vecteurs sont liés ou non, si un système d'équations linéaires a une solution unique ou pas …

Aussi il est intéressant d'associer à un système de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n ou ce qui revient au même à une matrice carrée d'ordre n, un nombre qui sera nul si et seulement si ces n vecteurs sont liés ou si et seulement si la matrice de ces vecteurs est de rang différent de n (strictement inférieur à n) ou si et seulement si cette matrice n'est pas inversible.
Ce nombre est le déterminant de ce système ou de la matrice associée relativement à une base donnée.

Dans ce cours a été volontairement omis toute la partie théorique et fastidieuse, on s'attachera cependant à bien connaître les propriétés des déterminants et à savoir les utiliser dans les exercices et les applications.

1. Déterminant

Dans tout ce chapitre, on considère un espace vectoriel **E** de dimension n sur un corps **K** (**R** ou **C**). On peut donc considérer que **E** = $\mathbf{R}^n$ ou **E** = $\mathbf{C}^n$.

Soit **B** = $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canonique de **E** = $\mathbf{K}^n$ ($\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$)
($e_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0, \ldots,0, 1)$)

1.1. Définition

On appelle **déterminant d'ordre n** une application qui à n vecteurs $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ de **E** fait correspondre un réel noté dét$(V_1, V_2, \ldots, V_n)$. Cette application est telle que dét$(e_1, e_2,\ldots, e_n) = 1$ et vérifie

$$\text{dét}(V_1, V_2, \ldots, V_n) = 0 \text{ si et seulement si } \{V_1, V_2, \ldots, V_n\} \text{ est lié.}$$

dét$(V_1,V_2,\ldots,V_n)$ est appelé **déterminant des vecteurs** $V_1, V_2,\ldots, V_n$.

On admettra l'existence et l'unicité d'une telle fonction.

D'autre part on notera dét$(V_1,V_2,\ldots,V_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & x_{nn} \end{vmatrix}$, où x_{ij} désigne la $i^{\text{ème}}$

coordonnée de V_j dans **B**.

Les colonnes du déterminant sont donc les matrices colonnes des coordonnées des V_j dans **B**.

Si A est la matrice (x_{ij}), on notera dét(A) au lieu de dét(V_1, … , V_n).

Et puisqu'une matrice carrée est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes sont indépendants :

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si dét(A) $\neq 0$

Un déterminant a toujours autant de lignes que de colonnes.

On admettra la propriété suivante :

Si ${}^tA$ est la matrice transposée de A (matrice dont les lignes sont les colonnes de A) :
dét(${}^tA$) = dét(A).

On peut donc échanger le rôle des colonnes et celui des lignes. Ce qui explique les parenthèses ci-dessous.

1.2. Propriétés

Le déterminant de n vecteurs a les propriétés suivantes :

**Il est linéaire par rapport à chaque colonne (ou chaque ligne).*

$$\text{dét}(V_1, .., \lambda V_i + \mu W_i, .., V_n) = \lambda\ \text{dét}(V_1, .., V_i, .., V_n) + \mu\ \text{dét}(V_1, .., W_i, .., V_n)$$

**Il change de signe si on échange 2 colonnes (ou 2 lignes).*

$$\text{dét}(V_1, \ldots, V_i, .., V_j, .., V_n) = -\ \text{dét}(V_1, \ldots, V_j, .., V_i, .., V_n)$$

**Il est inchangé si on ajoute à une colonne (resp. ligne) une combinaison linéaire des autres.*

$$\text{dét}(V_1, \ldots, V_i, .., V_n) = \text{dét}(V_1, \ldots, V_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j V_j, .., V_n)$$

**Il est nul s'il a une colonne (ou une ligne) nulle ou s'il a 2 colonnes (ou 2 lignes) identiques ou si l'une est une combinaison linéaire des autres.*

Exemple :

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 20 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 20 & 0 & 10 & 5 \end{vmatrix}$ (en utilisant la 1ère propriété et en mettant 2 en facteur dans la 4ème colonne)

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 20 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 20 & 0 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (en mettant 5 en facteur dans la 4ème ligne).

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (on a échangé la 1ère et la 2ème colonne)

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ (on a échangé la 1ère et la 4ème ligne)

3) Faire apparaître un maximum de zéros sur une ligne ou une colonne de

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

La seconde colonne contient un 0, il est facile d'en faire apparaître un autre en ajoutant la seconde ligne à la première d'où :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ on peut alors ajouter 2 fois la deuxième ligne à la troisième et on obtient :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 13 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. On verra plus loin qu'en développant Δ par rapport à la deuxième colonne, on calcule alors aisément Δ.

1.3. Calcul d'un déterminant

Cas de l'ordre 2

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad$ dét(A) = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Cas de l'ordre 3

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad$ dét(A) = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ et

dét(A)=$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$.

Ce résultat est donné par la règle dite de Sarrus et peut se retenir à l'aide du schéma suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

les produits allant de haut en bas (flèches rouges) étant attribués du signe + et les autres (de bas en haut, flèches bleues) du signe -.

Définitions : 1) Si A = (a_{ij}) est une matrice d'ordre n, on appelle **mineur** de a_{ij} dans A, le déterminant A_{ij} obtenu en considérant celui de A où on a enlevé la ligne et la colonne contenant a_{ij}. A_{ij} est donc un déterminant d'ordre n-1.

2) On appelle **cofacteur** de a_{ij} dans A le nombre C_{ij} tel que :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}.$$

Exemple 3 : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

D'où $C_{23} = -(-9 + 6 + 9) = -6$.

On a alors la propriété suivante très utile pour calculer des déterminants d'ordre supérieur à 3 : Si A = (a_{ij}),

dét(A) $= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$ *(développement suivant la* $j^{ème}$ *colonne) ou*

dét(A) $= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$ *(développement suivant la* $i^{ème}$ *ligne)*

Exemple : Si on reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de l'exemple précédent et si on développe suivant la 1ère ligne :

$$\text{dét}(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$\text{dét}(A) = (-18 + 4) + 2(3 - 2 - 9) - 3(-4 + 6 - 4) = -24$

Remarque : Pour faire un tel développement, on choisira une ligne (ou une colonne) qui comprend un maximum de 0 ou on en fera apparaître en ajoutant à une ligne ou à une colonne une combinaison linéaire des autres. C'est ce qui a été fait dans le premier exemple en 3) et le calcul de $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ s'effectue simplement en utilisant la dernière forme de Δ

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 13 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ et en développant suivant la deuxième colonne : $\Delta = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 13 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ on peut utiliser la règle de Sarrus ou faire apparaître un maximum de 0 dans une colonne (ou une ligne) et développer suivant cette colonne (ou ligne). Par exemple si on ajoute l'opposé de la première ligne à la deuxième et -4 fois la première à la troisième, on obtient :

$$\Delta = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & -34 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & 11 \\ -34 & -5 \end{vmatrix} = -384.$$

Cas des matrices triangulaires

C'est un cas où le calcul du déterminant est aisé. En effet on a la propriété suivante

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux

En effet : Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & a_{nn} \end{pmatrix}$, en développant par rapport à la première colonne : $\text{dét}(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & a_{nn} \end{vmatrix}$ et en itérant et en développant successivement par rapport aux premières colonnes, on obtient :

$\text{dét}(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33}. . .a_{nn}$ d'où le résultat.

Ce résultat se généralise au cas des matrices par blocs :

Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \mathbf{0} & A_3 \end{pmatrix}$, où les A_1 et A_3 sont des matrices carrées d'ordre n_1 et n_2, où $\mathbf{0}$ est une matrice nulle à n_1 colonnes et n_2 lignes, et où A_2 a n_2 colonnes et n_1 lignes quelconques.

$$\text{Alors dét}(A) = \text{dét}(A_1) \,.\, \text{dét}(A_3).$$

Avez-vous compris ? 3 : Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 & -8 \\ -1 & -3 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez dét(M).

On admettra aussi le résultat suivant :

$$\textit{dét}(A.B) = \textit{dét}(A).\textit{dét}(B).$$

Conséquence : Si A est d'ordre n et inversible, dét(A)≠0 et :
dét(A) dét(A^{-1}) = dét($A.A^{-1}$) = dét(I_n) = 1. D'où

$$\textit{dét}(A\text{-}1) = \frac{1}{\textit{dét}(A)}.$$

2. Application

Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Cramer

Cette méthode ne s'applique qu'aux systèmes de n équations à n inconnues dont le déterminant est non nul.
(Ici les inconnues sont les x_i, les a_{ij} sont donnés et les u_i sont donnés ou jouent le rôle de paramètres.)

Soit (I) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \,.\, + a_{1n}x_n = u_1 \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + \,.\, + a_{nn}x_n = u_n \end{cases}$ (I) peut s'écrire : AX = U

où A est la matrice (a_{ij}), X la matrice colonne des x_i et U celle des u_i. dét(A) est le déterminant du système. Si dét(A) est non nul A est inversible et (I) a une solution unique de la forme : $X = A^{-1}U$. On dit qu'on a un système de Cramer. A n'est pas toujours simplement inversible, voici une méthode qui permet de calculer X aisément sans inverser A.

Si A_i est la $i^{ème}$ colonne de A :

$$(I) \Leftrightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = U.$$

Si B_1 est la matrice de A où la première colonne est remplacée par U :

$B_1 = (UA_2 \ldots A_n) = ((x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_nA_n)\ A_2 \ldots A_n)$

Donc $\text{dét}(B_1) = x_1\text{dét}(A_1A_2 \ldots A_n) + x_2\text{dét}(A_2A_2\ldots A_n) + \ldots + x_n\text{dét}(A_nA_2\ldots A_n)$ puisque la fonction déterminant est linéaire par rapport à la première colonne. D'autre part un déterminant ayant deux colonnes identiques étant nul :

$\text{dét}(B_1) = x_1\text{dét}(A)$ et si $\text{dét}(A)\neq 0$ (A est inversible) : $x_1 = \dfrac{\text{dét}(B_1)}{\text{dét}(A)}$.

De façon identique :

$$x_i = \frac{\text{dét}(B_i)}{\text{dét}(A)}$$ *où B_i est la matrice A où la $i^{\text{ème}}$ colonne est remplacée par U.*

Cette méthode est bien sûr valable si les matrices sont à coefficients réels ou complexes.

Exercices

Exercice 1 - Calculer les déterminants des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, A + B , AB , A^2 , B^2 et $(A+B)^2$.

Exercice 2 - Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 8 \\ 7 & 9 & 2 & 4 \\ 2.37 & 5.19 & 6.52 & 1.84 \end{vmatrix}$

Exercice 3 - Calculer de déterminant $D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

Exercice 4 - Calculer $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$

Exercice 5 - On considère les 3 déterminants définis par $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a+2 \\ a & 2a+2 \end{vmatrix}$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 \\ a & 2a+2 & 3a+6 \\ a & 3a+2 & 6a+8 \end{vmatrix}$ $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 & a+6 \\ a & 2a+2 & 3a+6 & 4a+12 \\ a & 3a+2 & 6a+8 & 10a+20 \\ a & 4a+2 & 10a+10 & 20a+30 \end{vmatrix}$ avec $a \in \mathbf{R}$. Montrer que Δ_4 s'exprime simplement en fonction de Δ_3 et Δ_3 en fonction de Δ_2. En déduire l'expression de Δ_4 en fonction de a.

Exercice 6 - Calculer le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$.

Exercice 7 - Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$

Exercice 8 - Calculer le déterminant d'ordre n : $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$

Exercice 9 - Calculer le déterminant d'ordre n+1 : $D_2 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$

Exercice 10 - Calculer le déterminant d'ordre n : $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & \dots & C_k^{n-1} \\ 1 & C_{k+1}^1 & C_{k+1}^2 & \dots & C_{k+1}^{n-1} \\ 1 & C_{k+2}^1 & C_{k+2}^2 & \dots & C_{k+2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{k+n-1}^1 & C_{k+n-1}^2 & \dots & C_{k+n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$

(On rappelle que $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$)

Exercice 11 - Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 10 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

Exercice 12 - Résoudre : $\begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ 2x - 6y + z = 11 \\ 4x + 9y - 7z = 38 \end{cases}$

Exercice 13 - Résoudre le système (S) suivant les valeurs du réel λ : (S) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$

Exercice 14 - Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 13 \\ x + 2y + 3z + 4t = 26 \\ 4x - y + 2z + 6t = 18 \\ -x + 4y + 5z - 3t = 24 \end{cases}$

Exercice 15 - Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 5y + 6z + 7t = 9 \\ 5x + 6y + 7z + 4t = 11 \\ 6x + 7y + 4z + 5t = 13 \\ 7x + 4y + 5z + 6t = 11 \end{cases}$

Exercice 16 - Soit $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x+1 & 1 & -1 \\ 1-x & 1-x & 1 & -1 \\ 0 & 0 & x-4 & x \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. Montrer sans calculer D(x) que D(x) s'annule pour 3 valeurs de x distinctes. Calculer D(x).

Exercice 17 - Résoudre : $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ 3x + y + mz = 2 \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 18 - Résoudre : $\begin{cases} (4-m)x + 7y - z = -1 \\ -3x + (-6-m)y + z = 1 \\ -3x - 4y + (-1-m)z = 1 \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre m.