Leçon 01 – Exercices

Exercice 1- Calculer les expressions suivantes :

1) $(1+i)^4$; **2)** $(2-i)(1+i)(1-4i)$; **3)** $\frac{1}{1-i}$; **4)** $\frac{5-2i}{-1+i}$; **5)** $\frac{(2+3i)(-1+i)}{2-3i} + 3i$;

6) $\frac{1-4i}{3+2i} + \frac{2+i}{5-i}$; **7)** i^2 ; **8)** i^3 ; **9)** i^4 ; **10)** i^n ($n \in \mathbf{N}$).

Exercice 2 - Résoudre $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 5 + 2i \\ -z_1 + z_2 = 1 - 2i \end{cases}$

Exercice 3 - Soit $f(z) = z^3 - 2iz^2 - (1 - i)z - 2i$. Calculer $f(i)$, $f(1 - i)$ et $f(1+i)$.

Exercice 4 - Trouver les nombres complexes z tels que : $|z| = |z-1|$ (on pourra utiliser le conjugué de z pour exprimer $|z|^2$ et $|z - 1|^2$).

Trouver de même les nombres complexes z tels que $|z| = |z+2i|$.

Exercice 5 - Déterminer les modules des nombres complexes suivants :

1) $(1-2i)$; **2)** $\frac{\sqrt{8}-i\sqrt{6}}{4}$; **3)** $\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{2}}{2(1+2i)}$

Exercice 6 - Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $Z = \frac{z-1-i}{iz+1}$ en fonction de Re(z) et de Im(z). Quels sont les complexes z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 7 - 1) Calculer sinx sachant que $\cos x = -\frac{1}{3}$ et $x \in [0 , \pi]$.

2) Calculer cosx sachant que $\sin x = \frac{1}{5}$ et $x \in [\frac{\pi}{2} , \pi]$

Exercice 8 - Déterminer x tel que :

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x \geq 0$; **2)** $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos x \leq 0$; **3)** $\sin x = \frac{1}{2}$ et $x \in [\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}]$.

Exercice 9 - Donner les formes algébriques des complexes suivants :

1) $z_1 = 5e^{3i\pi/4}$; **2)** $z_2 = (\sqrt{3}\ , \frac{7\pi}{6})$

Exercice 10 - Déterminer un argument de chacun des nombres complexes de module 1 suivants :

1) i ; **2)** $-i$; **3)** 1 ; **4)** -1 ; **5)** $\frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$; **6)** $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$

Exercice 11 - Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1) $5i$; **2)** -3 ; **3)** $i+\sqrt{3}$; **4)** $2(1-\frac{\sqrt{3}}{3}i)$; **5)** $\sqrt{2}(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}})$; **6)** $(\frac{i}{1-i})^4$;

7) $(1+i)^{1990}$

Exercice 12 - Donner les formes trigonométriques puis exponentielles des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$; **2)** $z_2 = 4 - 4i$

Exercice 13 - **a)** Mettre z sous forme exponentielle dans les cas suivants :

1) $z = 3i$; **2)** $z = -8$; **3)** $z = (1 - i)^5$

b) Déterminer les parties réelles et imaginaires de :

$z_1 = e^{-1+i\pi/6}$; $z_2 = e^{2-i}$; $z_3 = e^{-i\pi/2}$; $z_4 = e^{1+i}\, e^{-2+i\pi/3}$.

Exercice 14 - 1) Soit $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que $j^2 = \bar{j}$, et calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 15 - Résoudre dans **C** les équations suivantes :

1)$2z^2 - 6z + 34 = 0$; 2)$z^2 - 2z + 4 = 0$ (on donnera les racines sous forme trigonométrique)

Exercice 16 - Résoudre $z^4 - z^2 - 2 = 0$

Exercice 17 – Soit $P(x) = x^4 – x^3 – 6x^2 + 14x – 12$;

Montrer que $1 + i$ est racine de $P(x)$. En déduire une factorisation de P **dans R**.

Exercice 18 - Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = -1 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n + 5n - 1 \end{cases}$

Exercice 19 - Déterminer u telle que : $4u_{n+2} + 2\sqrt{3}u_{n+1} + u_n = 19(\sqrt{3})^n$.

Quel est le comportement de u_n quand n tend vers l'infini?

Quelles sont les conditions initiales qui suppriment les termes en cosinus et sinus ?