Mathématiques 3
Aunège
Université Paris-sud
0dile Brandière

Correction des exercices de la leçon 1 : Nombres complexes

1. • $(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$
   • $(2-i)(1+i)(1-4i) = (3+i)(1-4i) = 7-11i$
   • $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$
   • $\frac{5-2i}{-1+i} = \frac{(5-2i)(-1-i)}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{3i}{2}$
   • $\frac{(2+3i)(-1+i)}{2-3i} + 3i = \frac{(2+3i)^2(-1+i)}{13} + 3i = \frac{(-5+12i)(-1+i)}{13} + 3i$
   $\frac{(2+3i)(-1+i)}{2-3i} + 3i = \frac{-7-17i}{13} + 3i = -\frac{7}{13} + \frac{22i}{13}$
   • $\frac{1-4i}{3+2i} + \frac{2+i}{5-i} = \frac{(1-4i)(3-2i)}{13} + \frac{(2+i)(5+i)}{26} = \frac{-5-14i}{13} + \frac{9+7i}{26} = -\frac{1}{26} - (\frac{21i}{26}$
   • $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1\ldots$

   Si $n = 4k$ $(k \in \mathbb{N})$ $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1$

   Si $n = 4k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ $i^n = i^{4k+1} = i^{4k}i = i$

   Si $n = 4k+2$ $(k \in \mathbb{N})$ $i^n = i^{4k+2} = i^{4k}i^2 = -1$

   Si $n = 4k+3$ $(k \in \mathbb{N})$ $i^n = i^{4k+3} = i^{4k}i^3 = -i$

2. $\left\{\begin{array}{ll} 3z_1 + z_2 = 5+2i & (1) \\ -z_1 + z_2 = 1-2i & (2) \end{array}\right.$

   (1) - (2) donne $4z_1 = 4+4i$, d'où $z_1 = 1+i$.

   Et (2) donne alors $z_2 = 1-2i+(1+i) = 2-i$.

3. $f(i) = i^3 - 2i^3 - (1-i)i - 2i = -1-2i$.

   $f(1-i) = (1-i)^3 - 2i(1-i)^2 - (1-i)^2 - 2i$
   $f(1-i) = (-2i)(1-i) - 2i(-2i) - (-2i) - 2i = -6-2i$

   $f(1+i) = (1+i)^3 - 2i(1+i)^2 - (1-i)(1+i) - 2i = 2i(1+i) - 2i(2i) - 2 - 2i = 0$

4. • $|z| = |z-1| \iff |z^2| = |z-1|^2$ car ces nombres sont positifs.
   $|z|^2 = z\overline{z}$ et $|z-1|^2 = (z-1)\overline{(z-1)} = z\overline{z} - z - \overline{z} + 1$.
   Donc $|z| = |z-1| \iff z\overline{z} = z\overline{z} - z - \overline{z} + 1$, soit $z + \overline{z} = 1$ ou $2\Re e(z) = 1$. D'où
   $$|z| = |z-1| \iff \Re e(z) = 1/2.$$
   • $|z| = |z+2i| \iff |z|^2 = |z+2i|^2$.
   $|z|^2 = z\overline{z}$ et $|z+2i|^2 = (z+2i)(\overline{z}-2i) = z\overline{z} - 2i(z-\overline{z}) + 4$.
   Donc $|z| = |z+2i| \iff z\overline{z} = z\overline{z} - 2i(z-\overline{z}) + 4$. Soit $z - \overline{z} = -2i$. Or $z - \overline{z} = 2i\Im m(z)$. Donc
   $$|z| = |z+2i| \iff \Im m(z) = -1.$$

5. • $|1-2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.
   • $|\frac{\sqrt{8}-i\sqrt{6}}{4}| = \frac{|\sqrt{8}-i\sqrt{6}|}{|4|} = \frac{\sqrt{8+6}}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.
   • $|\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{2}}{2(1+2i)}| = \frac{|\sqrt{5}-i\sqrt{2}|}{|2||1+2i|} = \frac{\sqrt{5+2}}{2\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{10}$.

6. Posons $z = x + iy$
   $$Z = \frac{(x-1)+i(y-1)}{(1-y)+ix} = \frac{[(x-1)+i(y-1)][(1-y)-ix]}{(1-y)^2+x^2}.$$
   D'où
   $$\Re e(Z) = \frac{(x-1)(1-y)+x(y-1)}{(1-y)^2+x^2} = \frac{y-1}{(1-y)^2+x^2},$$
   $$\Im m(z) = \frac{-x(x-1)+(y-1)(1-y)}{(1-y)^2+x^2} = \frac{x(1-x)+(y-1)^2}{(1-y)^2+x^2}.$$
   Z est un imaginaire pur si et seulement si $\Re e(Z) = 0$, soit $y = 1$ et $z = x + i$ ($x \in \mathbb{R}$).

7. 1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 8/9$.
   $x \in [0, \pi]$ donc $\sin x \geq 0$ et $\sin x = \sqrt{8}/3$.

   2) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{24}{25}$.
   Or $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ donc $\cos x \leq 0$ et $\cos x = -\frac{\sqrt{24}}{5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

8. 1) Si $\cos x = -1/2$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
   $\sin x \geq 0$ donc $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

   2) Si $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.
   $\cos x \leq 0$ donc $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

   3)Si $\sin x = 1/2$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
   Or $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, donc $x = \frac{5\pi}{6}$.

9. $z_1 = 5(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = 5(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$
(en effet $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$).

$z_2 = \sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = \sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$
(en effet $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$)

10. • $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, • $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$, • $\arg(1) = 0$, • $\arg(-1) = \pi$,

• $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ convient, $\arg(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$,

• $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta_1 = \frac{1}{2}\\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$ a pour solution $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ et

$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ a pour solution $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$, donc

$\arg[(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})] = \arg(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arg(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \theta_1 + \theta_2$
$\arg[(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})] = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$

11. • $|5i| = 5$ et $\arg(5i) = \frac{\pi}{2}$ donc $5i = 5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

• $|-3| = 3$ et $\arg(-3) = \pi$, donc $-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

• $|i + \sqrt{3}| = 2$ et si $\theta = \arg(i + \sqrt{3})$, $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{array}\right.$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ convient et

$$i + \sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}).$$

• $|2(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i)| = 2\sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ et si $\theta = \arg(2(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i))$, $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$ convient et

$$2(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i) = \frac{4\sqrt{3}}{3}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})).$$

• $|\sqrt{2}(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}})| = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = 1$, $\arg(\sqrt{2}(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}})) = \arg(1+i) - \arg(1 - i\sqrt{3})$.
Or $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ et si $\theta = \arg(1 - i\sqrt{3})$, $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient et $\arg(\sqrt{2}(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}})) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$.

$$\sqrt{2}(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}) = \cos\frac{7\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}.$$

• $|(\frac{i}{1-i})^4| = |\frac{i}{1-i}|^4 = \frac{|i|^4}{|1-i|^4} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{4}$.

$\arg(\frac{i}{1-i})^4 = 4\arg(\frac{i}{1-i}) = 4(\arg i - \arg(1-i)) = 4(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{4})) = 3\pi$ ou π.

$$(\frac{i}{1-i})^4 = \frac{1}{4}(\cos\pi + \sin\pi).$$

12. $|z_1| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et si $\theta = \arg z_1$, $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ convient et $z_1 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 2\sqrt{3}\ e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

    $|z_2| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ et si $\theta = \arg z_2$, $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ convient et $z_2 = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) = 4\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

13. (a) i) $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ car $|3i| = 3$ et $\arg(3i) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

    ii) $-8 = 8e^{i\pi}$ car $|-8| = 8$ et $\arg(-8) = \pi$

    iii) $(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5 e^{-5i\frac{\pi}{4}}$ car
    $|(1-i)^5| = |1-i|^5 = (\sqrt{2})^5$ et $\arg(1-i)^5 = 5\arg(1-i) = 5(-\frac{\pi}{4})$.

    (b) $z_1 = e^{-1}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-1}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, d'où :
    $\Re e(z_1) = e^{-1}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2e}$ et $\Im m(z_1) = e^{-1}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2e}$.

    $z_2 = e^2 e^{-i} = e^2(\cos(-1) + i\sin(-1))$, d'où :
    $\Re e(z_2) = e^2\cos(-1)$ et $\Im m(z_2) = e^2\sin(-1)$.

    $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) =$ -i, d'où :
    $\Re e(z_3) = 0$ et $\Im m(z_3) = -1$.

    $z_4 = e^{1+i}e^{-2+i\frac{\pi}{3}} = e^{-1+i(1+\frac{\pi}{3})} = e^{-1}e^{i(1+\frac{\pi}{3})}$, d'où :
    $\Re e(z_4) = e^{-1}\cos(1+\frac{\pi}{3})$ et $\Im m(z_4) = e^{-1}\sin(1+\frac{\pi}{3})$.

14. $j^2 = e^{4i\pi/3} = i^{-2i\pi/3} = \overline{j}$ (en effet $\frac{4\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ représentent le même angle).
    $j + \overline{j} = 2\Re e(j) = 2\cos(2\pi/3) = 2(-\frac{1}{2}) = -1$. Donc $1 + j + j^2 = 0$.

15. 1) $2z^2 - 6z + 34 = 0$ (1).
    $\Delta = -236 = (i2\sqrt{59})^2$ et les solution de (1) sont : $z_1 = \frac{6-2\sqrt{59}i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{59}}{2}i$ et $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{59}}{2}i$.

    2) $z^2 - 2z + 4 = 0$ (2). $\Delta = -4$, donc (2) a deux racines complexes conjuguées de module ρ et d'argument θ et $-\theta$ tels que
    $\begin{cases} \rho^2 = 4 \text{ et } \rho \geq 0 \\ 2\rho\cos\theta = 2 \end{cases}$. Donc $\rho = 2$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}$. $\theta = \frac{\pi}{3}$ convient.

L'une des racines de (2) a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{3}$ ($2e^{i\pi/3}$), l'autre a même module et pour argument $-\frac{\pi}{3}$ ($2e^{-i\pi/3}$).

16. $z^4 - z^2 - 2 = 0$ (1). Posons $Z = z^2$, alors Z vérifie : $\left\{\begin{array}{l} Z = z^2 \\ Z^2 - Z - 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$.

    $Z = -1$ est racine évidente de (2), le produit des racines de (2) est -2, la deuxième racine est donc 2. Donc (1) équivaut à $\left\{\begin{array}{l} Z = z^2 \\ Z = -1 \text{ ou } Z = 2 \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{l} z^2 = -1 \\ \text{ou} \\ z^2 = 2 \end{array}\right.$. Or

    $$z^2 = -1 \Longleftrightarrow z = \pm i.$$

    D'où les quatre solutions de (1) : $\{i, -i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

17. $P(1+i) = (1+i)^4 - (1+i)^3 - 6(1+i)^2 + 14(1+i) - 12$

    $(1+i)^2 = 2i$

    $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i$

    $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. D'où

    $P(1+i) = -4 - (-2+2i) - 6(2i) + 14(1+i) - 12$

    $P(1+i) = (-4+2+14-12) + i(-2-12+14) = 0$.

    P est à coefficients réels et $1+i$ est racine de P, donc $\overline{1+i} = 1-i$ est aussi racine de P et on peut factoriser P par

    $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2 - 2x + 2$.

    Pour factoriser P dans $\mathbb{R}$, on peut poser la division ou utiliser la méthode des coefficients indéterminés. On obtient alors le résultat :

    $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + x - 6)$

    Or $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$. Donc $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x-2)(x+3)$.

18. $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n + 5n - 1$ (1).

    D'après le cours de L2 $u_n = v_n + u_n^*$, où v_n est solution de l'équation homogène

    $v_{n+2} + 2v_{n+1} + 2v_n = 0$ (2) et u_n^* est une solution particulière de (1).

    Résolution de (2)

    L'équation caractéristique associée à (2) est : $r^2 + 2r + 2 = 0$ (3).

    $\Delta = -4 < 0$, donc (3) a deux racines complexes conjuguées r_1 et $\overline{r_1}$. Si ρ et θ sont les module et argument de r_1, on a $\left\{\begin{array}{l} \rho^2 = 2 \\ 2\rho\cos\theta = -2 \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{2} \\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$. $\theta = \frac{3\pi}{4}$ convient et $r_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ et $\overline{r_1} = \sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$. Les solutions de (2) sont alors de la forme :

    $$v_n = (\sqrt{2})^n(\lambda\cos(n\frac{3\pi}{4}) + \mu\sin(n\frac{3\pi}{4})).$$

    λ et μ sont des constantes réelles.

Détermination de u_n^*

On cherche u_n^* sous la forme $u_n^* = an + b$ (même forme que le second membre) et puisque u_n^* vérifie (1) :

$a(n+2) + b = -2(a(n+1) + b) - 2(an + b) + 5n - 1$, soit

$n(a + 2a + 2a - 5) + (2a + b + 2a + 2b + 2b + 1) = 0$.

D'où $a = 1$ et $b = -2$ et $u_n^* = n - 2$.

Donc les solutions de (1) sont de la forme

$$u_n = (\sqrt{2})^n(\lambda \cos(n\frac{3\pi}{4}) + \mu \sin(n\frac{3\pi}{4})) + n - 2.$$

On détermine λ et μ à l'aide des conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$, c'est à dire $\begin{cases} 1 = \lambda - 2 \\ -1 = \sqrt{2}(\lambda(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \mu\frac{\sqrt{2}}{2}) + 1 - 2 \end{cases}$, soit $\lambda = 3$ et $\mu = 3$.

$$u_n = 3(\sqrt{2})^n(\cos(n\frac{3\pi}{4}) + \sin(n\frac{3\pi}{4})) + n - 2.$$

19. $4u_{n+2} + 2\sqrt{3}u_{n+1} + u_n = 19(\sqrt{3})^n$ (1).

D'après le cours de L2 $u_n = v_n + u_n^*$, où v_n est solution de l'équation homogène $4v_{n+2} + 2\sqrt{3}v_{n+1} + v_n = 0$ (2) et u_n^* est une solution particulière de (1).

Résolution de (2)

L'quation caractéristique associée à (2) est : $4r^2 + 2\sqrt{3}r + 1 = 0$ (3).

$\Delta = -4 < 0$, donc (3) a deux racines complexes conjuguées r_1 et $\overline{r_1}$. Si ρ et θ sont les module et argument de r_1, on a $\begin{cases} \rho^2 = \frac{1}{4} \\ 2\rho\cos\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$, soit $\begin{cases} \rho = \frac{1}{2} \\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ convient et $r_1 = \frac{1}{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$ et $\overline{r_1} = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6}))$. Les solutions de (2) sont alors de la forme :

$$v_n = (\frac{1}{2})^n(\lambda \cos(n\frac{5\pi}{6}) + \mu \sin(n\frac{5\pi}{6})).$$

λ et μ sont des constantes réelles.

Détermination de u_n^*

On cherche u_n^* sous la forme $u_n^* = C(\sqrt{3})^n$ (même forme que le second membre) et puisque u_n^* vérifie (1) :

$4C(\sqrt{3})^{n+2} + 2\sqrt{3}(\sqrt{3})^{n+1} + C(\sqrt{3})^n = 19(\sqrt{3})^n$, soit en divisant par $(\sqrt{3})^n(\neq 0)$,

$12C + 6C + C = 19$.

D'où $C = 1$ et $u_n^* = (\sqrt{3})^n$.

Donc les solutions de (1) sont de la forme

$$u_n = (\frac{1}{2})^n(\lambda \cos(n\frac{5\pi}{6}) + \mu \sin(n\frac{5\pi}{6})) + (\sqrt{3})^n.$$

λ et μ sont des constantes réelles et $\cos(n\frac{5\pi}{6})$ et $\sin(n\frac{5\pi}{6})$ sont compris entre 1 et -1. Donc $\lambda\cos(n\frac{5\pi}{6}) + \mu\sin(n\frac{5\pi}{6})$ est borné puisque

$$|\lambda\cos(n\frac{5\pi}{6}) + \mu\sin(n\frac{5\pi}{6})| < |\lambda| + |\mu|.$$

D'autre part $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n(\lambda\cos(n\frac{5\pi}{6}) + \mu\sin(n\frac{5\pi}{6})) = 0.$$

De plus $\sqrt{3} > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{3})^n = +\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Les conditions initiales qui suppriment les termes en sinus et cosinus correspondent à $\lambda = \mu = 0$ et $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{3}$.