L3 économie appliquée
Aunège

Cours de Mathématiques
Université Paris XI
O. BRANDIERE

Leçon 1 : Les nombres complexes

Correction des " Exercez-vous "

Exercez-vous 9 : 1)Soit $P(z) = z^2 – 4z + 5$. Déterminer les racines de P sous forme algébrique.
2)Soit $P(z) = z^2 + 2z + 2$. Donner les racines de P sous forme trigonométrique.
3)Soit $P(x) = x^4 – 4x^3 – 6x^2 + 20x – 75$. Montrer que $1 + 2i$ est racine de P. En déduire une factorisation de P dans **R**.

Solution :

1)$\Delta = - 4 = (2i)^2$. Les deux racines z_1 et z_2 de P sont complexes conjuguées, on a
$z_1 = \dfrac{4 + 2i}{2} = 2 + i$ et $z_2 = 2 – i$.

2) Les racines z_1 et z_2 de P sont conjuguées. Soient ρ et θ le module et l'argument de l'une des racines. L'autre a alors pour module ρ et pour argument $-\theta$.
$z_1z_2 = \rho^2 = 2$, donc $\rho = \sqrt{2}$ $(\rho > 0)$ et
$z_1 + z_2 = 2\rho \cos\theta = -2$, donc $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ convient.
$z_1 = \sqrt{2}\,(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i\sin \dfrac{3\pi}{4})$ et $z_2 = \sqrt{2}\,(\cos(-\dfrac{3\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{3\pi}{4}))$

3) $P(1+2i) = (1 + 2i)^4 – 4(1 + 2i)^3 – 6(1 + 2i)^2 + 20(1 + 2i) – 75$. Or
$(1 + 2i)^2 = -3 + 4i$
$(1 + 2i)^3 = (1 + 2i)^2 (1 + 2i) = (-3 + 4i)(1 + 2i) = -11 – 2i$
$(1 + 2i)^4 = ((1 + 2i)^2)^2 = (-3 + 4i)^2 = -7 – 24i$.
D'où: $P(1+2i) = (-7 – 24i) – 4(-11 – 2i) – 6(-3 + 4i) + 20(1 + 2i) – 75$
$P(1+2i) = (-7 + 44 + 18 + 20 – 75) + i(-24 + 8 – 24 + 40) = 0$.

$1 + 2i$ est racine de P et P est à **coefficients réels**, donc $1 – 2i$ est aussi racine de P et P peut être factorisé par $(x – (1 + 2i))(x – (1 – 2i)) = x^2 – 2x + 5$.

On divise alors $x^4 – 4x^3 – 6x^2 + 20x – 75$ par $x^2 – 2x + 5$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 20x - 75 & x^2 - 2x + 5 \\
- & \\
x^4 - 2x^3 + 5x^2 & x^2 - 2x - 15 \\
\hline
\quad -2x^3 - 11x^2 + 20x - 75 & \\
\quad - & \\
\quad -2x^3 + 4x^2 - 10x & \\
\hline
\qquad -15x^2 + 30x - 75 & \\
\qquad - & \\
\qquad -15x^2 + 30x - 75 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

D’où $P(x) = (x^2 - 2x + 5)(x^2 - 2x - 15)$
Enfin, on peut factoriser $x^2 - 2x - 15$ sous la forme $(x - 5)(x+3)$ (racines d’une trinôme du second degré). On obtient alors $P(x) = (x^2 - 2x + 5)(x - 5)(x+3)$.
On ne peut pas faire mieux dans **R**.