L3 économie appliquée
Aunège

Cours de Mathématiques
Université Paris XI
O. BRANDIERE

Leçon 1 : Les nombres complexes

Correction des " Exercez-vous "

Exercez-vous 10 - Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = -1 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n + 19(5^n) \quad (1) \end{cases}$.

Solution :

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 4v_n$ (2) et
l'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 4 = 0$ (3).
$\Delta = -12 < 0$. Si ρ et θ sont les module et argument d'une solution de (3), on a :

$\rho = \sqrt{4} = 2$ et $4\cos\theta = 2$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ convient et d'après le cours

$v_n = 2^n(\lambda \cos n\frac{\pi}{3} + \mu \sin n\frac{\pi}{3})$ est la solution de l'équation homogène (2).

Une solution particulière de (1) est de la forme : $u^*_n = k5^n$. On détermine k en écrivant que u^*_n est solution de (1), soit :

$k5^{n+2} = 2(k5^{n+1}) - 4(k5^n) + 19(5^n)$ ou $5^n(25k - 10k + 4k - 19) = 1$ et $k = 1$.

D'où $u_n = v_n + u^*_n = 2^n(\lambda \cos(n\frac{\pi}{3}) + \mu \sin(n\frac{\pi}{3})) + 5^n$.

Or $u_o = -1$ et $u_1 = 1$ donc : $\begin{cases} \lambda+1= -1 \\ \lambda + \mu\sqrt{3} + 5 = 1 \end{cases}$ d'où $\lambda = -2$ et $\mu = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$

Soit $u_n = 2^n(-2\cos(n\frac{\pi}{3}) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(n\frac{\pi}{3})) + 5^n = -2^{n+1}(\cos(n\frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(n\frac{\pi}{3})) + 5^n$.