Leçon 07 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 3
Déterminer les extrema de f : $(x,y)\in]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\to x^2 + y^2 - 8x - 8y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 8$.

Solution

f et g : $(x,y) \to x^2 + y^2 - 8$ sont différentiables sur $\mathbf{C} =]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

Soit le Lagrangien $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 8x - 8y + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$.
L est différentiable sur **C** et

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 8 + 2\lambda x \ , \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 8 + 2\lambda y \text{ et } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 8.$$

(x_0, y_0) est un point stationnaire correspondant à λ_0 si et seulement si $x_0(1 + \lambda_0) = y_0(1 + \lambda_0) = 4$ et $x_0^2 + y_0^2 = 8$. D'où $x_0 = y_0$ (en effet $\lambda_0\neq-1$) et $x_0^2 = 4$.

Sur **C**, le seul point stationnaire est (2,2) et correspond à $\lambda_0 = 1$.

Or $L : (x,y) \to x^2 + y^2 - 8x - 8y + (x^2 + y^2 - 8) = 2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y - 8$ est convexe sur l'ensemble ouvert convexe **C** de $\mathbf{IR^2}$. (2,2) correspond donc à un minimum de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.