Leçon 07 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 2
1) Soit $f(x,y,z) = 3x^3 + 4y^2 + 5z^2 – x – 3y - 6z + 2$. Déterminez l'extremum de f sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$ (utilisez les résultats de l'exercez-vous 1).

2) Soit $f(x,y) = 3\sqrt[3]{x}\sqrt{y} – 2x – \frac{3}{4}y + 5$. Déterminez l'extremum de f sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$ (utilisez les résultats de l'exercez-vous 1).

Solution

1) D'après les résultats de l'exemples **6**, f est convexe sur l'ensemble
C = $]0;+\infty[\times]0;+\infty[\times]0;+\infty[$. D'autre part **C** est ouvert.
Donc si (x_0, y_0, z_0) est un point stationnaire de f sur **C**, il correspond à un minimum de f sur **C**. Il suffit donc ici de chercher les points stationnaires de f sur **C**.

Remarquons d'abord que f est différentiable sur **C** et

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 – 1,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 8y – 3,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 10z – 6.$$

Donc (x_0, y_0, z_0) est un point stationnaire de f sur **C** si et seulement si $x_0 = \frac{1}{3}$, $y_0 = \frac{3}{8}$ et $z_0 = \frac{3}{5}$. Ainsi $(\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{5})$ correspond au minimum de f sur **C**.

2) D'après les résultats de l'exemples **6**, f est concave sur l'ensemble **C** = $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.
D'autre part **C** est ouvert.
Donc si (x_0, y_0) est un point stationnaire de f sur **C**, il correspond à un maximum de f sur **C**. Il suffit donc ici de chercher les points stationnaires de f sur **C**.
En effet f est différentiable sur **C** et

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\times\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{1/2} – 2\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}3x^{1/3}y^{-1/2} - \frac{3}{4}.$$

Sur **C** : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^{2/3} = \frac{1}{2}y_0^{1/2}$. Et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ donne $x_0^{1/3} = \frac{1}{2}y_0^{1/2}$, soit $\frac{1}{2}y_0^{1/2} = x_0^{2/3} = x_0^{1/3}$ donc $x_0^{1/3} = 1$ et $x_0 = 1$ et $y_0 = 4$.
(1,4) est le maximum de f sur **C**.