Leçon 07 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 1

1) Soit $f(x,y,z) = 3x^3 + 4y^2 + 5z^2 - x - 3y - 6z + 2$. Montrez que f est convexe sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

2) Soit $f(x,y) = 3\sqrt[3]{x}\sqrt{y} - 2x - \frac{3}{4}y + 5$. Montrez que f est concave sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

Solution

1) **C** = $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$ est un produit d'intervalles, c'est un ensemble convexe de $\mathbf{IR^3}$ d'après les exemples du cours.
D'autre part $(x,y,z) \to 3x^3 + 4y^2 + 5z^2$ est convexe d'après l'exemple 3 du cours et $(x,y,z) \to -x - 3y - 6z + 2$ est affine, donc convexe (et concave) sur **C**.
La somme de deux fonctions convexes sur un même ensemble convexe est convexe sur cet ensemble. f est donc convexe sur **C**.

2) **C** = $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$ est un produit d'intervalles, c'est un ensemble convexe de $\mathbf{IR^3}$ d'après les exemples du cours.
$f(x,y) = x^{1/3}y^{1/2} - 2x - \frac{3}{4}y + 5$. Or d'après l'exemple 3 a) du cours $(x,y) \to x^{1/3}y^{1/2}$ est concave et d'après l'exemple 1, $(x,y) \to -2x - \frac{3}{4}y + 5$ est aussi concave. D'après la propriété 2 f est donc bien concave sur **C**.