Leçon 07 – Exercices

Exercice 1
Soit $f(x,y,z) = x^4 + 2y^3 + 5z^2 + 4x - 6y - 10z + 3$
1. Montrer que f est convexe sur sur un ensemble que l'on précisera.
2. Déterminer alors les extrema de f.

Solution

1. D'après l'exemple **3**-b) du paragraphe **1.3.2** du cours, $(x,y,z) \to x^4 + 2y^3 + 5z^2$ est convexe $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

D'autre part $(x,y,z) \to -4x - 6y - 10z + 3$ est convexe (et concave) sur $\mathbf{IR^2}$ car affine, donc d'après le cours f est bien convexe sur $\mathbf{C} =]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

2. Recherche des points stationnaires de f. f est différentiable de $\mathbf{IR^3}$.

(x,y,z) est un point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 - 6 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 10z - 10 \end{cases}$.

D'où les points stationnaires de f : $A = (1 , 1 , 1)$ et $B = (1 , -1 , 1)$.

Or $A \in \mathbf{C}$ et puisque f est convexe sur **C** A correspond à un **minimum** local de f.

Pour B, étudions $\Delta = f(x,y,z) - f(1,-1,1)$ au voisinage de $(1,-1,1)$ et posons $x = 1 + h$, $y = -1 + k$ et $z = 1 + t$. (h,k,t) est donc voisin de $(0,0,0)$ et
$\Delta = (1 + h)^4 + 2(-1 + k)^3 + 5(1 + t)^2 - 4(1 + h) - 6(-1 + k) -10(1 + t) + 3 - (-1)$

$$\Delta = 6h^2 - 6k^2 + 5t^2 + (4h^3 + h^4 + 2k^3).$$

Pour (h,k,t) voisin de $(0,0,0)$, la parenthèse est négligeable devant les termes de degré 2. Ainsi $\Delta \sim 6h^2 - 6k^2 + 5t^2$, expression qui change signe sur tout voisinage de $(0,0,0)$ (en effet si $k = 0$, l'expression est positive et si $h = t = 0$, l'expression est négative).

B est donc un **point col**.

Exercice 2
Soit $f(x,y,z) = -\dfrac{\sqrt{y^5}}{\sqrt{x}} -2x + 10y - 2$.
1. Montrer que f est concave sur un ensemble que l'on précisera.
2. Déterminer alors les extrema de f.

Solution

1. D'après l'exemple **4**-c) du paragraphe **1.3.2** du cours, $(x,y) \to \dfrac{\sqrt{y^5}}{\sqrt{x}}$ est convexe sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$, son opposée est donc concave et puisque $(x,y) \to -2x + 10y - 2$ est concave (et convexe) sur $\mathbf{IR^2}$ car affine. f est concave sur $\mathbf{C} =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

2. Recherche des points stationnaires de f. f est différentiable sur $]0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[$

(x,y) est un point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\sqrt{y^5}}{2\sqrt{x^3}} - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{5}{2}\dfrac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}} + 10 = 0 \end{cases}$ et

$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\sqrt{y^5}}{2\sqrt{x^3}} = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{5}{2}\dfrac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}} = 10 \end{cases}$. En faisant le quotient des deux égalités, y = x, et la première équation donne par exemple y = 4.

Le seul point stationnaire de f est donc (4,4).

Or $(4,4) \in \mathbf{C}$ et f est concave sur **C**, (4,4) correspond donc à un **maximum** de f sur **C**.

Exercice 3

Soit $f(x,y) = 12\sqrt{y}\,\sqrt[3]{x} - 4x + 5y + 3$, sous la contrainte (C) : $2x^2 + y^2 = 18$.

1. Etudier la convexité de f.
2. Montrer que (1,4) est un point stationnaire du Lagrangien.
3. Conclure.

Solution

1. D'après le cours $(x,y) \to 12\sqrt{y}\,\sqrt[3]{x}$ est concave sur $\mathbf{C} =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$(x,y) \to -4x + 5y + 3$ est aussi concave (et convexe) puisqu'elle est affine. f est donc concave sur **C**. f est différentiable sur **C**.

2. Le Lagrangien L : $(x,y,\lambda) \to 12\sqrt{y}\,\sqrt[3]{x} - 4x + 5y + 3 + \lambda(2x^2 + y^2 - 18)$ est différentiable sur **C**. Et (x,y) est un point stationnaire de L, s'il existe $\lambda \in \mathbf{IR}$ tel que

$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 4\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^2}} - 4 + 4\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 6\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}} + 5 + 2\lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 18 \end{cases}$. Or les 3 équations sont bien vérifiées pour x = 1, y = 2 et

$\lambda = -1$. (1,4) est bien un point stationnaire de L associé à $\lambda = -1$.

3. Or pour $\lambda = -1$, L est concave sur **C**, puisque $-(2x^2 + y^2 - 18)$ l'est ainsi que $f(x,y)$. On en déduit donc que le point stationnaire $(1,4) \in$ **C** est un maximum de f sur **C** sous la contrainte (C).