Leçon 07 – Cours : Optimisation et convexité

Objectif : On optimise des fonctions convexes (ou concaves) et différentiables sur des produits d'intervalles. Dans le cadre convexe (ou concave), qui intervient souvent en économie, le problème d'optimisation se trouve très simplifié puisque les conditions du second ordre sont inutiles.

1. Fonctions à plusieurs variables concaves ou convexes et optimisation libre.

1.1. Fonctions concaves

Soit f : $\mathbf{IR}^2 \to \mathbf{IR}^2$ définie sur un produit d'intervalles $\mathbf{I_1}\times\mathbf{I_2}$. f(x,y) est donc défini pour x appartenant à l'intervalle $\mathbf{I_1}$ et pour y appartenant à l'intervalle $\mathbf{I_2}$.

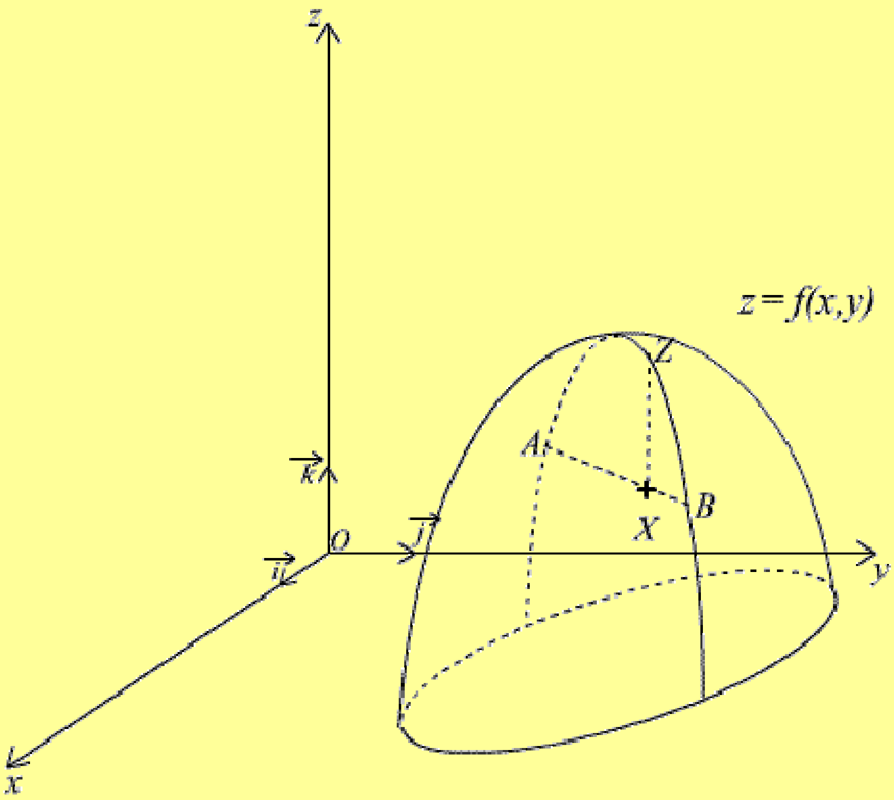
Définition : f est **concave** sur $\mathbf{I_1}\times\mathbf{I_2}$ si et seulement si, pour tous points A et B de $\mathbf{I_1}\times\mathbf{I_2}$ et pour tout $t\in[0 ; 1]$,

$$f(tA + (1 - t)B) \geq tf(A) + (1 - t)f(B) \quad (1).$$

Remarque : Si $t\in[0 ; 1]$, $X = tA + (1 - t)B\in[A ; B](\subset \mathbf{I_1}\times\mathbf{I_2})$.

Si t = 0, X = B , si t = 1 X = A et si $t = \frac{1}{2}$ X est le milieu de [A ; B] et quand t parcourt [0 ; 1], X parcourt tout le segment [A ; B].

On a le dessin suivant :



$A = (x_A ; y_A)$, $B = (x_B ; y_B)$, $X = tA + (1 - t)B = (tx_A + (1 - t)x_B ; ty_A + (1 - t)y_B) = (x ; y)$ et Z, le point de la représentation graphique de f d'abscisse x et d'ordonnée y a pour coordonnées $(x = tx_A + (1 - t)x_B ; y = ty_A + (1 - t)y_B ; f(x,y) = f(tA + (1 - t)B)$.

L'inégalité (1) qui caractérise la concavité de f exprime que Z est au dessus de X.

Autrement dit, la ***représentation graphique de f est au dessus de la corde [A ; B].***

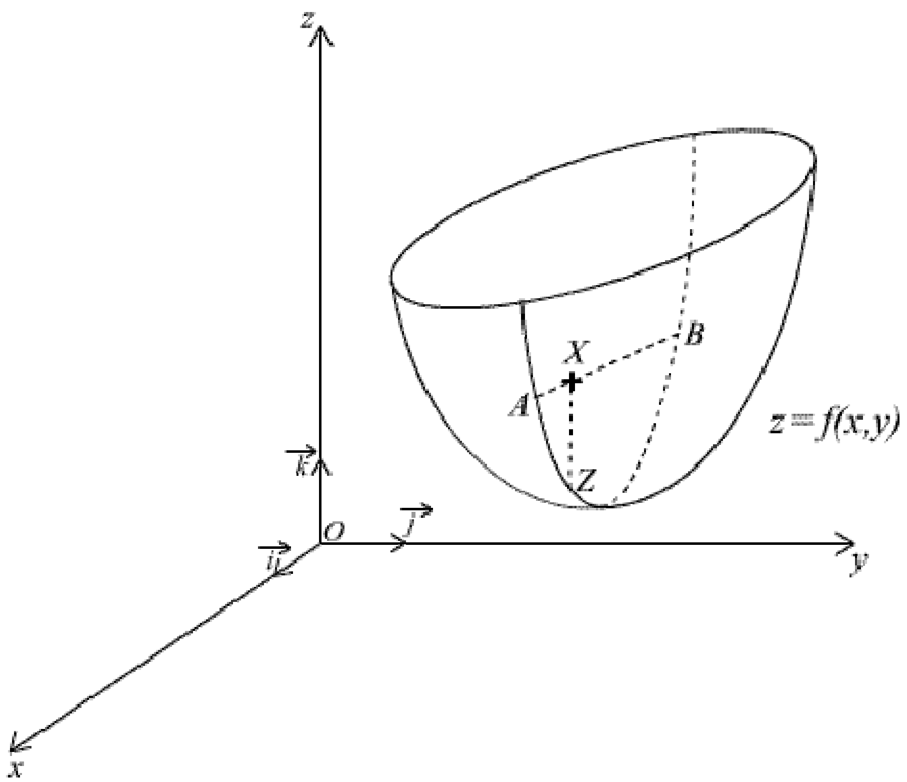
1.2. Fonctions convexes

Soit f : **IR**^{2} → **IR**^{2} définie sur un convexe $\mathbf{I_1 \times I_2}$, où $\mathbf{I_1}$ et $\mathbf{I_2}$ sont deux intervalles de **IR**.

Définition : f est **convexe** sur $\mathbf{I_1 \times I_2}$ si et seulement si, pour tous points A et B de $\mathbf{I_1 \times I_2}$ et pour tout $t \in [0 ; 1]$,

$$f(tA + (1 - t)B) \leq tf(A) + (1 - t)f(B) \quad (2).$$

On a le dessin suivant :



Ici l'inégalité (2) qui caractérise la convexité de f exprime que Z est en dessous de X.

Autrement dit, la ***représentation graphique de f est en dessous de la corde [A ; B].***

Propriété 1 *: f est convexe sur* $\boldsymbol{I_1 \times I_2}$ *si et seulement si (-f) est concave sur* $\boldsymbol{I_1 \times I_2}$.

***Propriété 2** : Si f_1 , f_2, …, f_p sont concaves (respectivement convexes) sur un même produit d'intervalles, toute combinaison linéaire de ces fonctions, de la forme*
$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_p f_p$, avec $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, .. $\alpha_p \geq 0$ est concave (respectivement convexe sur ce même produit d'intervalles).

Ces définitions et ces propriétés se prolongent sur $\mathbf{IR^3}$, $\mathbf{IR^4}$….

Sur $\mathbf{IR^4}$ par exemple, f est une fonction de 4 variables définie sur un produit de 4 intervalles, elle prend ses valeurs dans **IR** et **A** et **B** ont 4 coordonnées au lieu de 2.

1.3. Exemples à connaître

1- Les **fonctions affines**. Dans $\mathbf{R^2}$ elles sont de la forme f(x,y) = ax + by + c, avec a, b et c réels quelconques. Ces fonctions sont **concaves et convexes** sur $\mathbf{R^2}$, on les appelle parfois rectilignes.

Sur $\mathbf{IR^3}$, on a le même résultat avec les fonctions de la forme f(x,y,z) = ax + by + cz + d, on les appellent parfois planes.

Sur $\mathbf{IR^4}$, on a le même résultat avec les fonctions de la forme f(x,y,z,t) = ax + by + cz + dt + e….(fonctions dites parfois hyperplanes).

Remarque : D'après la propriété **2**, si on ajoute à une fonction concave (respectivement convexe) sur un produit d'intervalles une fonction affine, on obtient une fonction concave (respectivement convexe) sur ce même produit d'intervalles.

2- Soit A = (a_1 , …, a_n) un point quelconque de $\mathbf{IR^n}$ et f l'application de $\mathbf{IR^n}$ dans $\mathbf{IR^n}$ définie par : $X = (x_1, x_2, .., x_n) \rightarrow \| X - A \| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ...+ (x_n - a_n)^2}$ est **convexe**.

3- a) f : $(x , y) \rightarrow ax^\alpha + by^\beta$ avec $\alpha \in [0 ; 1]$, $\beta \in [0 ; 1]$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ est **concave** sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.
On peut généraliser à $\mathbf{R^3}$, $\mathbf{R^4}$, …Par exemple $(x,y,z,t) \rightarrow ax^\alpha + by^\beta + cz^\gamma + dt^\delta$ avec α, β, γ et δ réels de [0 ; 1] et a, b, c, d positifs ou nuls, est concave sur
$]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

b) f : $(x , y) \rightarrow ax^\alpha + by^\beta$ avec $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ et $a \geq 0$, $b \geq 0$ est **convexe** sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

On peut généraliser à $\mathbf{R^3}$, $\mathbf{R^4}$, …Par exemple $(x,y,z,t) \rightarrow ax^\alpha + by^\beta + cz^\gamma + dt^\delta$ avec α, β, γ et δ réels supérieurs à 1 et a, b, c, d positifs et nuls, est convexe sur
$]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

4- a) f : $(x,y) \rightarrow x^\alpha y^\beta$ avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\alpha + \beta \leq 1$ est **concave** sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

b) f : $(x,y) \rightarrow x^\alpha y^\beta$ avec $\alpha \leq 0$ et $\beta \leq 0$ est **convexe** sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

c) $f : (x,y) \to x^{\alpha} y^{\beta}$ avec $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 1$ et $\alpha + \beta \geq 1$ est **convexe** sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

Ces exemples ne sont pas à savoir par cœur, ils seront rappelés si nécessaire à l'examen. mais il faut savoir les utiliser astucieusement dans les exercices.

Propriété fondamentale :

*Si f est **concave** et différentiable sur un produit d'intervalles ouverts, alors si X_0 est un point stationnaire de f, f atteint son **maximum** sur C en X_0.*

*Si f est **convexe** et différentiable sur un produit d'intervalles ouverts, alors si X_0 est un point stationnaire de f, f atteint son **minimum** sur C en X_0.*

2. Fonctions à plusieurs variables concaves ou convexes - Optimisation sous contrainte

Dans le cadre convexe le problème de l'optimisation sous contrainte est lui aussi simplifié.

Si (x_0,y_0) est un point stationnaire du Lagrangien correspondant à la valeur λ_0 du multiplicateur de Lagrange, et si $f(x,y) + \lambda_0 g(x,y)$ est concave (respectivement convexe) sur un convexe $I_1 \times I_2$ contenant (x_0,y_0), alors (x_0,y_0) est un maximum (respectivement minimum) de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Exercices

Exercice 1

Soit $f(x,y,z) = x^4 + 2y^3 + 5z^2 + 4x - 6y - 10z + 3$

1. Montrer que f est convexe sur sur un ensemble que l'on précisera.
2. Déterminer alors les extrema de f.

Exercice 2

Soit $f(x,y,z) = -\frac{\sqrt{y^5}}{\sqrt{x}} -2x + 10y - 2$.

1. Montrer que f est concave sur un ensemble que l'on précisera.
2. Déterminer alors les extrema de f.

Exercice 3

Soit $f(x,y) = 12\sqrt{y}\sqrt[3]{x} - 4x + 5y + 3$, sous la contrainte (C) : $2x^2 + y^2 = 18$.

1. Etudier la convexité de f.
2. Montrer que (1,4) est un point stationnaire du Lagrangien.
3. Conclure.