Leçon 06 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 5

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n + 6n^2 - 2n - 3 \ (1) \end{cases}$.

2. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + 6n - 5 \quad (1) \end{cases}$.

3. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1\ ,\ u_1 = -1 \\ u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = -25(-2)^n \quad (1) \end{cases}$

Solution

1. D'après le cours $u_n = u^*_n + v_n$, où (u^*_n) est une solution particulière de (1) et (v_n) une solution de l'équation homogène associée à (1) : $v_{n+2} = -3v_{n+1} - 2v_n$ (2). Or d'après l'exercice **3.** ci-dessus, $v_n = \lambda(-1)^n + \mu(-2)^n$ (λ et μ sont deux réels à déterminer par les conditions initiales).

Une solution particulière (u^*_n) de (1) est, d'après le cours de la forme $u^*_n = an^2 + bn + c$ d'où, en écrivant que $u\mu_n$ vérifie (1) :
$a(n+2)^2 + b(n+2) + c = -3a(n+1)^2 - 3b(n+1) - 3c - 2an^2 - 2bn - 2c + 6n^2 - 2n - 3$
Soit $\forall n \in \mathbf{N}$: $n^2(6a-6) + n(10a+6b+2) + (7a+5b+6c+3) = 0$ D'où a=1 ; b=-2 et c=0.
Donc $u^*_n = n^2 - 2n$ et $u_n = \lambda(-1)^n + \mu(-2)^n + n^2 - 2n$.

Or $u_0 = u_1 = 1$ d'où :

$\begin{cases} \lambda+\mu=1 \\ -\lambda-2\mu=2 \end{cases}$ soit $\mu = -3$ et $\lambda = 4$. Donc $\boxed{u_n = 4(-1)^n - 3(-2)^n + n^2 - 2n}$.

2. Par une méthode analogue et en utilisant le résultat de **3.,** la solution de l'équation homogène associée à (1) est $v_n = \lambda + \mu(4)^n$ (les constantes λ et μ seront déterminées à l'aide des conditions initiales).

Une solution particulière de (1) est de la forme : $u^*_n = n(an+b) = an^2 + bn$ (car 1 est racine de l'équation caractéristique, il y a donc **résonance**). On détermine a et b en écrivant que u^*_n vérifie (1) :
$a(n+2)^2 + b(n+2) = 5a(n+1)^2 + 5b(n+1) - 4an^2 - 4bn + 6n - 5$

Soit $\forall n \in \mathbf{N}$: $n^2(a-a) + n(4a+b-10a-b-6) + (4a+2b-5a-5b+5) = 0$. D'où a=-1 et b=2.
Donc $u_n = \lambda + \mu(4^n) - n^2 + 2n$.

Or $u_o = 0$ et $u_1 = -1$ donc: $\begin{cases} \lambda+\mu=0 \\ \lambda+4\mu=-2 \end{cases}$ soit $\mu = -\frac{2}{3}$ et $\lambda = \frac{2}{3}$.

Soit $\boxed{u_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(4^n) - n^2 + 2n}$.

3. Par une méthode analogue et en utilisant le résultat de **4.,** la solution de l'équation homogène associée à (1) est $v_n = \lambda(3)^n + \mu n(3)^n$ (les constantes λ et μ seront déterminées à l'aide des conditions initiales).

Une solution particulière de (1) est de la forme : $u^*_n = k(-2)^n$. On détermine k en écrivant que u^*_n vérifie (1) : $k(-2)^{n+2} - 6k(-2)^{n+1} + 9k(-2)^n = -25(-2)^n$. En divisant membre à membre par $-(2)^n$ on obtient $4k + 12k + 9k = -25$. D'où $k = -1$, $u^*_n = -(-2)^n$ et
$u_n = -(-2)^n + \lambda(3)^n + \mu n(3)^n$.

On détermine λ et μ à l'aide des conditions initiales.
Or $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$, on obtient donc $\begin{cases} 1 = -1 + \lambda \\ -1 = 2 + 3\lambda + 3\mu \end{cases}$. D'où $\lambda = 2$ et $\mu = -3$ et

$$\boxed{u_n = -(-2)^n + 2\,(3)^n - n(3)^{n+1}.}$$