Leçon 06 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 2

1. Déterminer la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + n^2 - 3n + 1 \quad (1) \end{cases}$.

2. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + \frac{1}{2} 3^n \quad (1) \end{cases}$.

3. Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2^{n-1} \quad (1) \end{cases}$.

Solution

1. D'après le cours $u_n = v_n + u^*_n$, où (u^*_n) est une solution particulière de (1) et (v_n) une solution de l'équation homogène associée : $v_{n+1} = 3v_n$ (2).

L'équation homogène associée (2) a pour solution $v_n = v_0 3^n$.

D'après le cours une solution particulière de (1) est de la forme :
$u^*_n = an^2 + bn + c$. En écrivant que u^*_n vérifie (1), on obtient :
$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2an^2 + 3bn + 3c + n^2 - 3n + 1$
D'où $\forall n \in \mathbf{N} : n^2(-2a-1) + n(2a-2b+3) + a + b - 2c - 1 = 0$ et $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = -\frac{1}{4}$.

Donc $u^*_n = -\frac{1}{2} n^2 + n - \frac{1}{4}$ et $u_n = v_0 3^n - \frac{1}{2} n^2 + n - \frac{1}{4}$.

Or $u_0 = -1$ soit $v_0 - \frac{1}{4} = -1$ et $v_0 = -\frac{3}{4}$ d'où $\boxed{u_n = -\frac{3}{4} 3^n - \frac{1}{2} n^2 + n - \frac{1}{4}}$

2. En procédant de même :
La solution de l'équation homogène est : $v_n = v_0(-2)^n$.

Une solution particulière de (1) est d'après le cours de la forme : $u^*_n = k3^n$.
D'où $k3^{n+1} = -2k3^n + \frac{1}{2} 3^n$ soit $5k = \frac{1}{2}$ et $u^*_n = \frac{3^n}{10}$. Donc $u_n = v_0(-2)^n + \frac{3^n}{10}$.

Or $u_0 = 1$ d'où : $v_0 + \frac{1}{10} = 1$ et $v_0 = \frac{9}{10}$. Donc $\boxed{u_n = \frac{9}{10}(-2)^n + \frac{3^n}{10}}$.

3. Toujours par la même méthode :
La solution de l'équation homogène associée est : $v_n = v_0 2^n$.

Une solution particulière de (1) est de la forme: $u^*_n = kn2^n$ (en effet $2^{n-1} = \frac{1}{2}\ 2^n$ et 2 est aussi la raison de v, ici il y a un phénomène de **résonance**) et puisque u^*_n est solution de (1), k vérifie : $k(n+1)2^{n+1} = kn2^{n+1} + \frac{1}{2}\ 2^n$. D'où $k = \frac{1}{4}$ et $u_n = v_0 2^n + \frac{1}{4}\ n2^n$.

Or $u_0 = 5$, d'où $v_0 = 5$ et $\boxed{u_n = 5.\ 2^n + \frac{1}{4} n\ 2^n}$.