Leçon 06 – Exercices

Exercice 1

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ 3u_{n+1} = u_n + n^2 + 2n \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $3u_{n+1} = u_n + n^2 + 2n$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$ (2).

Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0 (\frac{1}{3})^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(n^2 + 2n)$ et on pose $u_n^* = an^2 + bn + c$. On détermine a, b et c en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$3(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) = an^2 + bn + c + n^2 + 2n$, soit
$n^2(3a - a - 1) + n(6a + 3b - b - 2) + (3a + 3b + 3c - c) = 0$

D'où $\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 6a + 2b - 2 = 0 \\ 3a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$ et $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = 0$. Donc

$$u_n^* = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$$

et $u_n = v_0 (\frac{1}{3})^n + \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$.

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = 2$. Soit $2 = v_0$ et

$$u_n = 2(\frac{1}{3})^n + \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n.$$

Exercice 2

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - 4u_n = 3^n - 1 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $u_{n+1} - 4u_n = 3^n - 1$.
L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = 4v_n$ (2).
Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0 4^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(3^n - 1)$ et on pose $u_n^* = a3^n + b$. On détermine a et b en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$a3^{n+1} + b - 4(a3^n + b) = 3^n - 1$, soit $3^n(3a - 4a - 1) + (b - 4b + 1) = 0$.

D'où $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ -3b + 1 = 0 \end{cases}$ et a = -1 et b = $\frac{1}{3}$. Donc

$$u_n^* = -3^n + \frac{1}{3}$$

et $u_n = v_0\, 4^n - 3^n + \frac{1}{3}$.

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = 1$. Soit $1 = v_0 - 1 + \frac{1}{3}$, $v_0 = \frac{5}{3}$ et

$$u_n = \frac{5}{3}\, 4^n - 3^n + \frac{1}{3}.$$

Exercice 3

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 2u_{n+1} = u_n + 3(\frac{1}{2})^n \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $2u_{n+1} = u_n + 3(\frac{1}{2})^n$. L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ (2). Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0(\frac{1}{2})^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :

On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(3(\frac{1}{2})^n)$. Mais ici il y a résonance et on pose $u_n^* = an(\frac{1}{2})^n$. On détermine a en écrivant que u_n^* vérifie (1):

$2(a(n+1)(\frac{1}{2})^{n+1}) = an(\frac{1}{2})^n + 3(\frac{1}{2})^n$, soit

$n(\frac{1}{2})^n (a - a) + (\frac{1}{2})^n (a - 3) = 0$

D'où a = 3. Donc

$$u_n^* = 3n(\frac{1}{2})^n$$

et $u_n = v_0(\frac{1}{2})^n + 3n(\frac{1}{2})^n$.

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = -1$.Soit $-1 = v_0$ et

$$u_n = -(\frac{1}{2})^n + 3n(\frac{1}{2})^n.$$

Exercice 4

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = 2u_{n-1} + n^2 - 2 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $u_n = 2u_{n-1} + n^2 - 2$.
L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = 2v_n$ (2).
Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0 2^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(n^2 + 2n)$ et on pose
$u_n^* = an^2 + bn + c$. On détermine a, b et c en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$an^2 + bn + c = 2(a(n-1)^2 + b(n-1) + c) + n^2 - 2$, soit
$n^2(a - 2a - 1) + n(b + 4a - 2b) + (c - 2a + 2b - 2c + 2) = 0$
D'où $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ 4a - b = 0 \\ -2a + 2b - c + 2 = 0 \end{cases}$ et a = -1, b = - 4 et c = -4. Donc $u_n^* = -n^2 - 4n - 4$ et
$$u_n = v_0 2^n - n^2 - 4n - 4.$$

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = 0$. Soit $0 = v_0 - 4$, $v_0 = 4$ et

$$u_n = 2^{n+2} - n^2 - 4n - 4.$$

Exercice 5
Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{2e}{2e+1} \\ u_{n+1} + 2u_n + e^{-n-1} = 0 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $u_{n+1} + 2u_n + e^{-n-1} = 0$.
L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = -2v_n$ (2). Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0(-2)^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(-e^{-n-1})$ et on pose
$u_n^* = ae^{-n}$. On détermine a en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$ae^{-n-1} + 2ae^{-n} + e^{-n-1} = 0$, soit
$e^{-n-1}(a + 2ae + 1) = 0$
D'où $a = -\dfrac{1}{1 + 2e}$. Donc
$$u_n^* = -\frac{e^{-n}}{1 + 2e}$$
et $u_n = v_0(-2)^n - \dfrac{e^{-n}}{1 + 2e}$.

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = \dfrac{2e}{2e + 1}$ .Soit $\dfrac{2e}{2e + 1} = v_0 - \dfrac{1}{1 + 2e}$,
$v_0 = 1$ et
$$u_n = (-2)^n - \frac{e^{-n}}{1 + 2e}.$$

Exercice 6

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n - 1 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $u_{n+1} = u_n + n - 1$.
L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = v_n$ (2).
Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre (n - 1). Mais ici il y a résonance étant donnée la forme de (2) et on pose $u_n^* = n(an + b)$. On détermine a et b en écrivant que u_n^* vérifie (1): $(n + 1)(a(n + 1) + b) = n(an + b) + n - 1$, soit
$n^2(a – a – 1) + n(2a + b – b - 1) + (a + b + 1) = 0$

D'où $\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{cases}$ et $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{3}{2}$. Donc

$$u_n^* = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

et $u_n = v_0 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$. Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = 3$.Soit $3 = v_0$ et

$$u_n = 3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n.$$

Exercice 7

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_n + 3\,u_{n-1} = (-3)^n + 1 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $u_n + 3\,u_{n-1} = (-3)^n + 1$.
L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = -3v_n$ (2).
Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0(-3)^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $((-3)^n + 1)$.
Mais ici il y a résonance et on pose $u_n^* = an(-3)^n + b$. On détermine a et b en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$an(-3)^n + b +3\,[a(n-1)(-3)^{n-1} + b] = (-3)^n + 1$, soit
$n(-3)^n\,(a – a) + (-3)^n\,(a – 1) + (b + 3b – 1) = 0$
D'où $a = 1$ et $b = \frac{1}{4}$. Donc

$$u_n^* = n(-3)^n + \frac{1}{4}$$

et $u_n = v_0(-3)^n + n(-3)^n + \frac{1}{4}$.

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = -1$. Soit $-1 = v_0 + \frac{1}{4}$, $v_0 = -\frac{5}{4}$ et

$$u_n = -\frac{5}{4}(-3)^n + n(-3)^n + \frac{1}{4}.$$

Exercice 8

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 3 \text{ et } u_1 = 3 \\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n - 1 + n \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n - 1 + n$.

L'équation homogène associée à (1) est $2v_{n+2} - 3v_{n+1} + v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $2r^2 - 3r + 1 = 0$ (3).
(3) s'écrit $(r - 1)(2r - 1) = 0$ ($r = 1$ est racine évidente). Les racines de (3) sont donc $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{1}{2}$.
D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$v_n = k_1 + k_2(\frac{1}{2})^n$$

et les solutions de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(- 1 + n)$. Mais ici il y a résonance ($r_1 = 1$ et le second membre est un polynôme) et on pose
$u_n^* = n(an + b)$. On détermine a et b en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$2(n+2)(a(n+2) + b) = 3(n+1)(a(n+1) + b).) – (n(an + b).) – 1 + n$, soit
$n^2(2a – 3a + a) + n(8a + 2b – 6a – 3b + b – 1) + (8a + 4b – 3a – 3b + 1) = 0$
D'où $\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 5a + b + 1 = 0 \end{cases}$ et $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{7}{2}$. Donc

$$u_n^* = \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{2}n$$

et $u_n = k_1 + k_2(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{2}n$.
Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 3$ et $u_1 = 3$.
Soit $\begin{cases} 3 = k_1 + k_2 \\ 3 = k_1 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \end{cases}$. On obtient $k_1 = 9$ et $k_2 = -6$ et

$$u_n = 9 - 6(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{2}n.$$

Exercice 9

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 0 \\ 4u_{n+2} = u_n + 2 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $4u_{n+2} = u_n + 2$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} - \frac{1}{4} v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 - \frac{1}{4} = 0$ (3).

(3) s'écrit $(r - \frac{1}{2})(r + \frac{1}{2}) = 0$. Les racines de (3) sont donc $r_1 = -\frac{1}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{2}$.

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$v_n = k_1(-\frac{1}{2})^n + k_2(\frac{1}{2})^n$$

et les solutions de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre (+ 2) et on pose
$u_n^* = a$. On détermine a en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$4a = a + 2$, soit $a = \frac{2}{3}$ et

$$u_n^* = \frac{2}{3}.$$

D'où $u_n = k_1(-\frac{1}{2})^n + k_2(\frac{1}{2})^n + \frac{2}{3}$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1= 0$.

Soit $\begin{cases} 1 = k_1 + k_2 + \frac{2}{3} \\ 0 = -k_1\frac{1}{2} + k_2\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \end{cases}$. On obtient $k_1 = \frac{5}{6}$ et $k_2 = -\frac{1}{2}$ et

$$u_n = \frac{5}{6}(-\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^{n+1} + \frac{2}{3}$$

Exercice 10

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 2^n + 1 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 2^n + 1$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 - 5r + 6 = 0$ (3).
(3) s'écrit $(r - 2)(r - 3) = 0$. Les racines de (3) sont donc $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$v_n = k_1 2^n + k_2 3^n$$

et les solutions de (1) sont de la forme $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(2^n + 1)$. Mais ici il y a résonance ($r_1 = 2$ et le second membre contient une puissance de 2) et on pose $u_n^* = an2^n + b$. On détermine a et b en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$an2^n + b - 5(a(n-1)2^{n-1} + b) + 6(a(n-2)2^{n-2} + b) = 2^n + 1$, soit
$n2^{n-2}(4a - 10a + 6a) + 2^{n-2}(10a - 12a - 4) + (b - 5b + 6b - 1) = 0$
D'où $\begin{cases} -2a - 4 = 0 \\ 2b - 1 = 0 \end{cases}$ et $a = -2$ et $b = \frac{1}{2}$. Donc

$$u_n^* = -n2^{n+1} + \frac{1}{2}$$

et $u_n = k_1 2^n + k_2 3^n - n2^{n+1} + \frac{1}{2}$.
Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Soit $\begin{cases} 1 = k_1 + k_2 + \frac{1}{2} \\ 1 = 2k_1 + 3k_2 - 4 + \frac{1}{2} \end{cases}$. On obtient $k_1 = -3$ et $k_2 = \frac{7}{2}$ et

$$u_n = (-3)2^n + \left(\frac{7}{2}\right)3^n - n2^{n+1} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 11
Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 - 3r + 2 = 0$ (3).
(3) s'écrit $(r - 1)(r - 2) = 0$ ($r = 1$ est racine évidente). Les racines de (3) sont donc $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$v_n = k_1 + k_2 2^n$$

et les solutions de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :

On cherche u_n^* de la même forme que le second membre (+1). Mais ici il y a résonance (r_1 = 1 et le second membre est un polynôme) et on pose $u_n^* = an$. On détermine a en écrivant que u_n^* vérifie (1): $a(n+2) = 3a(n+1) - 2an +1$, soit $n(a – 3a + 2a) + (2a – 3a – 1)= 0$.
D'où $a = -1$,

$$u_n^* = -n$$

et $u_n = k_1 + k_2 2^n - n$.
Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1= 1$.
Soit $\begin{cases} 0 = k_1 + k_2 \\ 1 = k_1 + 2k_2 - 1 \end{cases}$. On obtient $k_1 = -2$ et $k_2 =2$ et

$$u_n = -2 + 2^{n+1} - n.$$

Exercice 12

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \text{ et } u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2n + 1 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2n + 1$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 – 4r + 4 = 0$ (3).
(3) s'écrit $(r – 2)^2 = 0$. (3) a donc une racine double $r_0 = 2$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$v_n = k_1 2^n + k_2 n 2^n$$

et les solutions de (1) sont de la forme $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(2n + 1)$ et on pose $u_n^* = an + b$ On détermine a et b en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$a(n+2) + b = 4(a(n+1) + b) – 4(an + b) + 2n + 1$, soit
$n(a – 4a + 4a - 2) + (2a + b – 4a – 4b + 4b - 1) = 0$
D'où $\begin{cases} a - 2 = 0 \\ -2a + b - 1 = 0 \end{cases}$ et $a = 2$ et $b = 5$. Donc

$$u_n^* = 2n + 5$$

et $u_n = k_1 2^n + k_2 n 2^n + 2n + 5$.
Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 2$ et $u_1= -1$.
Soit $\begin{cases} 2 = k_1 + 5 \\ -1 = 2k_1 + 2k_2 + 7 \end{cases}$. On obtient $k_1 = -3$ et $k_2 = -1$ et

$$u_n = (-3)2^n – n2^n + 2n + 5.$$

Exercice 13

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = -1 \\ 3u_{n+2} = -2u_{n+1} + 5u_n + 3 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $3u_{n+2} = -2u_{n+1} + 5u_n + 3$.

L'équation homogène associée à (1) est $3v_{n+2} + 2v_{n+1} - 5v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $3r^2 + 2r - 5 = 0$ (3).
(3) s'écrit $(r - 1)(3r + 5) = 0$ ($r = 1$ est racine évidente). Les racines de (3) sont donc $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{5}{3}$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$v_n = k_1 + k_2(-\frac{5}{3})^n$$

et les solutions de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre (+3). Mais ici il y a résonance ($r_1 = 1$ et le second membre est un polynôme) et on pose $u_n^* = an$. On détermine a en écrivant que u_n^* vérifie (1): $3a(n+2) = -2a(n+1) + 5an + 3 = 0$,
soit $n(3a + 2a - 5a) + (6a + 2a - 3) = 0$. D'où $a = \frac{3}{8}$,

$$u_n^* = \frac{3}{8} n$$

et $u_n = k_1 + k_2(-\frac{5}{3})^n + \frac{3}{8} n$.
Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$.
Soit $\begin{cases} 1 = k_1 + k_2 \\ -1 = k_1 - \frac{5}{3} k_2 + \frac{3}{8} \end{cases}$. On obtient $k_1 = \frac{7}{64}$ et $k_2 = \frac{57}{64}$ et

$$u_n = \frac{7}{64} + \frac{57}{64} (-\frac{5}{3})^n + \frac{3}{8} n.$$

Exercice 14
Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2^n \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2^n$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 - 4r + 4 = 0$ (3).
(3) s'écrit $(r - 2)^2 = 0$. (3) a donc une racine double $r_0 = 2$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$v_n = k_1 2^n + k_2 n 2^n$$

et les solutions de (1) sont de la forme $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre (2^n) Mais ici il y a résonance

($r_0 = 2$ est la racine double et le second membre est une puissance de 2) et on pose $u_n^* = an^2 2^n$. On détermine a en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$a(n+2)^2 2^{n+2} = 4a(n+1)^2 2^{n+1} - 4an^2 2^n + 2^n$, soit
$n^2 2^n(4a - 8a + 4a) + n2^n(16a - 16a) + 2^n(16a - 8a - 1) = 0$.

D'où $a = \frac{1}{8}$ et

$$u_n^* = \frac{1}{8} n^2 2^n .$$

Donc $u_n = k_1 2^n + k_2 n2^n + \frac{1}{8} n^2 2^n$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Soit $\begin{cases} 0 = k_1 \\ 1 = 2k_1 + 2k_2 + \frac{1}{4} \end{cases}$. On obtient $k_1 = 0$ et $k_2 = \frac{3}{8}$ et

$$u_n = \frac{3}{8} n2^n + \frac{1}{8} n^2 2^n = 3n2^{n-3} + n^2 2^{n-3} = (n^2 + 3n)2^{n-3}.$$

Exercice 15

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 27 \\ u_n - 9u_{n-1} + 20u_{n-2} = 5^n + 12 \end{cases}$.

Solution

Notons (1) l'équation $u_n - 9u_{n-1} + 20u_{n-2} = 5^n + 12$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} - 9v_{n+1} + 20v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 - 9r + 20 = 0$ (3).
(3) s'écrit $(r - 4)(r - 5) = 0$. Les racines de (3) sont donc $r_1 = 4$ et $r_2 = 5$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$v_n = k_1 4^n + k_2 5^n$$

et les solutions de (1) sont de la forme $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre ($5^n + 12$). Mais ici il y a résonance ($r_2 = 5$ et le second membre contient une puissance de 5) et on pose $u_n^* = an5^n + b$ On détermine a et b en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$an5^n + b - 9(a(n-1)5^{n-1} + b) + 20(a(n-2)5^{n-2} + b) = 5^n + 12$, soit
$n5^{n-2}(25a - 45a + 20a) + 5^{n-2}(45a - 40a - 25) + (b - 9b + 20b - 12) = 0$

D'où $\begin{cases} 5a - 25 = 0 \\ 12b - 12 = 0 \end{cases}$ et $a = 5$ et $b = 1$. Donc

$$u_n^* = n5^{n+1} + 1$$

et $u_n = k_1 4^n + k_2 5^n + n5^{n+1} + 1$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 27$.

Soit $\begin{cases} 1 = k_1 + k_2 + 1 \\ 27 = 4k_1 + 5k_2 + 25 + 1 \end{cases}$. On obtient $k_1 = -1$ et $k_2 = 1$ et

$$u_n = -4^n + 5^n + n5^{n+1} + 1.$$

Exercice 16
Déterminer (u_n) telle que $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 3u_n = a^n + 8$, suivant les valeurs du paramètre a.

Solution

Notons (1) l'équation $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 3u_n = a^n + 8$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} + 4v_{n+1} + 3v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 + 4r + 3 = 0$ (3).
(3) s'écrit $(r + 1)(r + 3) = 0$ ($r = -1$ est racine évidente). Les racines de (3) sont donc $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme

$$v_n = k_1(-1)^n + k_2(-3)^n$$

et les solutions de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*) :
On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(a^n + 8)$. Mais ici, suivant les valeurs de a, il y a ou non résonance.

Si $a \neq -1$ et $a \neq -3$, il n'y a pas résonance et on peut poser $u_n^* = c_1a^n + c_2$. On détermine c_1 et c_2 en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$c_1a^{n+2} + c_2 + 4(c_1a^{n+1} + c_2) + 3(c_1a^n + c_2) = a^n + 8$, soit
$a^n (c_1a^2 + 4 c_1a + 3c_1 - 1) + (c_2 + 4c_2 + 3 c_2 – 8) = 0$
D'où $\begin{cases} c_1a^2 + 4 c_1a + 3c_1 - 1 \\ 8c_2 – 8= 0 \end{cases}$ et $c_1 = \dfrac{1}{a^2 + 4a + 3}$ et $c_2 = 1$ (remarquons que $a^2 + 4a + 3$ est non nul car $a \neq -1$ et $a \neq -3$). Donc

$$u_n^* = \frac{a^n}{a^2 + 4a + 3} + 1$$

et

$$u_n = k_1(-1)^n + k_2(-3)^n + \frac{a^n}{a^2 + 4a + 3} + 1.$$

On ne peut pas calculer k_1 et k_2 par manque de conditions initiales.

Si $a = -1$, il y a résonance et u_n^* est de la forme $u_n^* = c_1n(-1)^n + c_2$. On détermine c_1 et c_2 en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$c1(n+2)(-1)^{n +2} + c_2 + 4(c_1(n+1)(-1)^{n +1} + c_2) + 3(c_1n(-1)^n + c_2) = (-1)^n + 8$, soit
$n(-1)^n (c_1 - 4c_1 + 3c_1) + (-1)^n(2c_1 – 4c_1 – 1) + (c_2 + 4c_2 + 3 c_2 – 8) = 0$
D'où $\begin{cases} -2c_1 - 1 \\ 8c_2 – 8= 0 \end{cases}$ et $c_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $c_2 = 1$. Donc

$$u_n^* = \frac{1}{2} n(-1)^{n+1} + 1$$

et

$$u_n = k_1(-1)^n + k_2(-3)^n + \frac{1}{2} n(-1)^{n+1} + 1.$$

On ne peut pas calculer k_1 et k_2 par manque de conditions initiales.

Si $a = -3$, il y a résonance et u_n^* est de la forme $u_n^* = c_1n(-3)^n + c_2$. On détermine c_1 et c_2 en écrivant que u_n^* vérifie (1):
$c_1(n+2)(-3)^{n +2} + c_2 + 4(c_1(n+1)(-3)^{n +1} + c_2) + 3(c_1n(-3)^n + c_2) = (-3)^n + 8$, soit

$n(-3)^n (9c_1 - 12c_1 + 3c_1) + (-3)^n(18c_1 - 12c_1 - 1) + (c_2 + 4c_2 + 3c_2 - 8) = 0$

D'où $\begin{cases} 6c_1 - 1 = 0 \\ 8c_2 - 8 = 0 \end{cases}$ et $c_1 = \frac{1}{6}$ et $c_2 = 1$. Donc

$$u_n^* = \frac{1}{6} n(-3)^{n+1} + 1$$

et

$$u_n = k_1(-1)^n + k_2(-3)^n + \frac{1}{6} n(-3)^{n+1} + 1.$$

On ne peut pas calculer k_1 et k_2 par manque de conditions initiales.